Fragestunde zur Linearen Algebra I

Stephanie Troppmann

TU München

Nullbedingung

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.
Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, falls für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

impliziert, dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Matrix-Vektor-Produkt

Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^t \in K^n$.

Dann gilt

$$Ax = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrizen und lineare Unabhängigkeit

Wir können die Nullbedingung also umschreiben als

$$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

wobei A die Matrix mit Spalten $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Die Implikation gilt, falls A vollen Rang hat.

Dualraum

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.
Dann ist der **Dualraum** V^* von V

$$V^* = \{f \mid f : V \mapsto K \text{ ist linear}\}.$$

Die Elemente von V^* heißen **lineare Funktionale**.

Duale Abbildung

Seien K V und W zwei K-Vektorraum und $f : V \mapsto W$ linear. Dann ist die zu f **duale Abbildung** $f^* : W^* \mapsto V^*$ eindeutig definiert durch

$$f^*(g) = g \circ f$$

für alle $g \in W^*$.

Duale Abbildung - Beispiel

Wir betrachten die beiden Vektorräume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sowie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, \; x \to \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$$

Es gilt

- $\mathbb{R}^* = \{g(x) = mx \mid m \in \mathbb{R}\}$
- $(\mathbb{R}^2)^* = \{g(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Duale Abbildung - Beispiel II

Dann muss die duale Abbildung $f^* : W^* \mapsto V^*$ für jedes $g(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 \in W^*$ erfüllen

$$\begin{aligned} f^*(g) &= f^*(\alpha x_1 + \beta x_2) = g \circ f \\ &= g(x, 2x) = \alpha x + 2\beta x = (\alpha + 2\beta)x \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Äquivalenzrelation

Eine Relation $\sim$ auf einer Menge A heißt **Äquivalenzrelation**, falls $\sim$

- reflexiv

$$\forall a \in A: \; a \sim a$$

- symmetrisch,

$$\forall a, b \in A: \; a \sim b \; \Rightarrow \; b \sim a$$

- transitiv,

$$\forall a, b, c \in A: \; a \sim b \wedge b \sim c \; \Rightarrow \; a \sim c$$

ist.

Unterraum

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ eine Teilmenge von V. Dann heißt U **Unterraum** von V, falls gilt:

- $U \neq \emptyset$
- Für alle $u, w \in U$ gilt $u + w \in U$
- Für alle $u \in U$ und $\alpha \in K$ gilt $\alpha u \in U$

Quotientenraum

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum von V. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf V durch

$$v \sim w \quad \Leftrightarrow \quad v - w \in U$$

für alle $v, w \in V$.

Quotientenraum II

Der Vektorraum

$$V \backslash U = \{[v] \, ; \, v \in V\} = \{\{w \, ; \, w \sim v\} \, ; \, v \in V\}$$

mit

$$[v + w] = [v] + [w], \qquad [\alpha v] = \alpha [v]$$

für alle $\alpha \in K$ und $v, w \in V$ heißt **Quotientenraum**.

Quotientenraum - Beispiel

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und einen eindimensionalen Unterraum

$$U = \operatorname{span}\{v\}$$

für $v \neq 0$.

Dann ist der Quotientenraum von U die Menge aller zu U parallelen Geraden.

Quotientenraum - Beispiel II

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sowie ein lineares Funktional $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Dann bildet die Menge aller Nullstellen

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) = 0\}$$

einen Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Für ein $y \in \mathbb{R}^n$ ist dann die Nebenklasse

$$[y] = N + y$$

die Menge der Nullstellen des verschobenen Funktionals

$f_y(x) = f(x - y)$.

Direkter Beweis

- Zeigen Sie, dass die Menge aller Polynome vom Grad kleiner gleich n einen Unterraum von $\mathbb{R}[X]$ bilden.
- Zeigen Sie: Ist $A \subset B$, so gilt $\mathrm{span}(A) \subset \mathrm{span}(B)$.
- Sei $f : V \mapsto W$ linear. Zeigen Sie, dass $\mathrm{kern}(f)$ ein Unterraum von V ist.

Beweis durch Widerspruch

- Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt: (x, y) ist genau dann linear unabhängig wenn $x \notin \mathrm{span}(y)$ and $y \notin \mathrm{span}(x)$.
- Sei $f : V \mapsto W$ linear. Zeigen Sie, f injektiv genau dann wenn $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$.
- Sei $f : V \mapsto W$ linear und $\dim(V) = \dim(W)$. Zeigen Sie, f injektiv genau dann wenn f surjektiv.