# EBENEN

CAROLINE LASSER, STEPHANIE TROPPMANN

## 1. Ebenen in der Schulmathematik

**1.1. Parameterform.** Eine Ursprungsebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ kann als Spann zweier linear unabhängiger Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ geschrieben werden,

$$E = \operatorname{span}(v, w) = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Aus der Schule kennen Sie diese Darstellung als „Parameterform“.

**1.2. Koordinatenform.** Eine Ursprungsebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ kann als orthogonales Komplement eines Vektors $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geschrieben werden,

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = 0\right\}.$$

In der Schule wird diese Darstellung „Koordinatenform“genannt.

Sind Vektoren $v, w$ wie in §1.1 gegeben, so kann der Normalenvektor

$$n = v \times w$$

als das Kreuzprodukt von $v$ und $w$ gewählt werden.

## 2. Weitere Darstellungsformen

**2.1. Lineare Gleichungen.** Eine Ursprungsebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ kann als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems $f(x) = 0$ geschrieben werden,

$$E = L_f(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\} = \operatorname{Kern}(f),$$

wobei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3,$$

und $n$ ein Normalenvektor der Ebene wie in §1.2 ist.

**2.2. Graph eines linearen Funktionals.** Eine Ursprungsebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ kann als Graph eines linearen Funktionals $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ geschrieben werden,

$$E = \operatorname{Graph}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

wobei

$$\varphi(x) = -\tfrac{n_1}{n_3} x_1 - \tfrac{n_2}{n_3} x_2, \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

und $n$ ein Normalenvektor der Ebene wie in §1.2 mit $n_3 \neq 0$ ist.

Ist $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ursprungsebene, deren Normalenvektoren in der dritten Komponente gleich Null sind, $n_3 = 0$, so kann

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 n_1 + x_2 n_2 = 0,\ x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

---

*Date*: 19. Januar 2017.

nicht als Graph eines linearen Funktionals aus $(\mathbb{R}^2)^*$ geschrieben werden. Dies ist vergleichbar zur Situation der $x_2$-Achse

$$\operatorname{span}(e_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die nicht als Graph eines linearen Funktionals $\ell \in \mathbb{R}^*$ geschrieben werden kann.