# DIMENSIONSFORMEL

CAROLINE LASSER

Da der Beweis der Dimensionsformel für endlich-dimensionale Unterräume $U$ und $W$ eines $K$-Vektorraums,

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W),$$

in der Übung schwierig erschien, wiederholen wir einen wichtigen Beweisschritt.

Sei $(v_1, \ldots, v_l)$ eine Basis von $U \cap W$, die wir zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_l, u_{l+1}, \ldots, u_k)$ von $U$ und zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_l, w_{l+1}, \ldots, w_m)$ von $W$ ergänzen.

Wir zeigen nun, dass $(v_1, \ldots, v_l, u_{l+1}, \ldots, u_k, w_{l+1}, \ldots, w_m)$ linear unabhängig ist. Seien also $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_{l+1}, \ldots, \beta_k, \gamma_{l+1}, \ldots, \gamma_m \in K$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_l v_l + \beta_{l+1} u_{l+1} + \cdots + \beta_k u_k + \gamma_{l+1} w_{l+1} + \cdots + \gamma_m w_m = 0.$$

Wir folgern

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_l v_l + \beta_{l+1} u_{l+1} + \cdots + \beta_k u_k = -\left(\gamma_{l+1} w_{l+1} + \cdots + \gamma_m w_m\right) \in U \cap W.$$

Da $(v_1, \ldots, v_l)$ eine Basis von $U \cap W$ ist, gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_l v_l + \beta_{l+1} u_{l+1} + \cdots + \beta_k u_k = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l.$$

Dies bedeutet

$$(\alpha_1 - \lambda_1) v_1 + \cdots + (\alpha_l - \lambda_l) v_l + \beta_{l+1} u_{l+1} + \cdots + \beta_k u_k = 0$$

und wegen linearer Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_l, u_{l+1}, \ldots, u_k)$ auch

$$\beta_{l+1} = \cdots = \beta_k.$$

Das bedeutet

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_l v_l + \gamma_{l+1} w_{l+1} + \cdots + \gamma_m w_m = 0,$$

und weil $(v_1, \ldots, v_l, w_{l+1}, \ldots, w_m)$ linear unabhängig ist, auch

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = \gamma_{l+1} = \ldots = \gamma_m = 0,$$

wie gewünscht.

*Date*: 2. Dezember 2016.