Übung zur Polynominterpolation

1. *Lineare Interpolation*

Seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$, und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) Wählen Sie $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und skizzieren Sie für drei aussagekräftig gewählte Paare (y_0, y_1) das eindeutige Polynom p vom Grad kleiner gleich eins, welches

$$p(x_0) = y_0, \qquad p(x_1) = y_1 \qquad (*)$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass es ein Polynom p vom Grad kleiner gleich eins gibt, welches die Eigenschaft $(*)$ erfüllt.

c) Bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraums der Polynome vom Grad kleiner gleich eins.

d) Begründen Sie über das Schubfachprinzip, dass das in b) gefundene Polynom eindeutig bestimmt ist.

2. *Lagrange polynomials*

Let $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ be pairwise distinct.

a) Prove that for each $j = 0, \dots, n$

$$\ell_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

is a polynomial of degree n.

b) Prove that $\ell_j(x_k) = \delta_{kj}$ for all $k, j = 0, \dots, n$.

c) Prove that the polynomials $\ell_0, \dots, \ell_n$ span the $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{P}_n$ of polynomials of degree $\leq n$.

d) Construct an isomorphism from $\mathbb{P}_n$ to $\mathbb{R}^{n+1}$.