Übung zu Quotientenräumen

1. *Quotientenräume des* $\mathbb{R}^3$

   Bestimmen Sie den Quotientenraum $\mathbb{R}^3/U$ für folgende Unterräume $U \subseteq \mathbb{R}^3$:

   a) $U = \{0\}$,

   b) $U = \operatorname{span}(v)$ für ein $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,

   c) $U = \operatorname{span}(v, w)$ für $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig,

   d) $U = \mathbb{R}^3$.

2. *Dimension of a quotient space*

   Consider a finite-dimensional K-vector space V and a subspace $U \subseteq V$ of V. Augment a basis $(u_1, \dots, u_k)$ of U to a basis $B = (v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k)$ of V.

   a) Prove that $B_U = ([v_1], \dots, [v_n])$ is a basis of V/U.

   b) Express $\dim(V/U)$ in terms of $\dim(V)$ and $\dim(U)$.

   c) For $v \in V$, let $\Phi_B(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k)$. Determine $\Phi_{B_U}([v])$. Provide a short explanation.