Übung zur Dimensionsformel

1. *Unterräume*
   Sei V ein K-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Unterräume von V. Beweisen oder widerlegen Sie:

   a) $U \cap W$ ist ein Unterraum von V.

   b) $U \cup W$ ist ein Unterrraum von V.

2. *Dimension formula*
   Let V be a vector space and $U, W \subseteq V$ finite-dimensional subspaces of V. Consider a basis $(v_1, \ldots, v_l)$ of $U \cap W$ and augment it

   - to a basis $(v_1, \ldots, v_l, u_{l+1}, \ldots, u_k)$ of U and
   - to a basis $(v_1, \ldots, v_l, w_{l+1}, \ldots, w_m)$ of W.

   Work on the following three tasks:

   a) Prove that $(v_1, \ldots, v_l, u_{l+1}, \ldots, u_k, w_{l+1}, \ldots, w_m)$ is linearly independent.

   b) Determine $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_l, u_{l+1}, \ldots, u_k, w_{l+1}, \ldots, w_m)$.

   c) Complete the dimension formula for subspaces,

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \cdots .$$