Caroline Lasser, Stephanie Troppmann

Übung zu Permutationsmatrizen

1. *Permutationen und Transpositionen*

   a) Bestimmen Sie alle 2×2 Permutationsmatrizen.

   b) Bestimmen Sie alle 3×3 Permutationsmatrizen.

   c) Wie viele $n \times n$ Permutationsmatrizen gibt es?

   d) Bestimmen Sie die Inverse der 3×3 Transpositionsmatrix $P_{2,3}$ über den Invertierungsalgorithmus. Protokollieren Sie die benötigten Elementarmatrizen. Schreiben Sie dann $P_{2,3}$ als Produkt von Elementarmatrizen.

   e) Bestimmen Sie die Inverse einer $n \times n$ Transpositionsmatrix $P_{i,j}$ über den Invertierungsalgorithmus. Protokollieren Sie die benötigten Elementarmatrizen. Schreiben Sie dann $P_{i,j}$ als Produkt von Elementarmatrizen.

2. *Properties of permutation matrices*

   a) Prove that $P_\pi P_\sigma = P_{\pi \circ \sigma}$ for all $\pi, \sigma \in S_n$.

   b) Let $\pi \in S_n$. Determine $\sigma \in S_n$ with $P_\pi^{-1} = P_\sigma$. Justify your answer.

   c) Let $A \in K^{m \times n}$ a matrix with column vectors $a_1, \ldots, a_n \in K^m$. Prove that

   $$AP_\pi = \begin{pmatrix} a_{\pi(1)} & \ldots & a_{\pi(n)} \end{pmatrix}, \qquad \pi \in S_n.$$

   d) Let $A \in K^{m \times n}$ a matrix with row vectors $a_1, \ldots, a_m \in K^n$. Prove that

   $$P_\pi A = \begin{pmatrix} a_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ a_{\pi^{-1}(m)} \end{pmatrix}, \qquad \pi \in S_m.$$

   e) Formulate the results of c) and d) as phrases.