Übung zu Transposition und Rang

1. *Rang*

   a) Bestimmen Sie den Rang einer Diagonalmatrix und formulieren Sie Ihr Ergebnis als Merksatz.

   b) Seien $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(xy^t)$.

   c) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ eine Matrix mit $\operatorname{rang}(A) = 1$. Bestimmen Sie Vektoren $x \in \mathbb{C}^n$ und $y \in \mathbb{C}^m$ mit $A = xy^t$.

   d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}$, $A \mapsto \operatorname{rang}(A)$ linear ist.

2. *Rank and normal form*
   Recall the following normal form theorem, proved for last week's exercise sheet:

   If $f : K^n \to K^m$ is linear and $r = \dim(\operatorname{Ran}(f))$, then there exist bases $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ of K^n and K^m, respectively, such that
   $$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$
   is the matrix that represents f with respect to $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$.

   a) Determine the rank of A and of A^t. Explain your answer.

   b) Let $B \in K^{m\times n}$ with $\operatorname{rank}(B) = r$. Prove the existence of invertible matrices $S \in \operatorname{GL}(m, K)$ and $T \in \operatorname{GL}(n, K)$ with $B = SAT^{-1}$.

   c) Prove that $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

   d) Prove that $\operatorname{rank}(B^t) = \operatorname{rank}(B)$.