# Übung zur Transformationsformel

1. *Darstellende und Transformationsmatrizen*
   Betrachten Sie die beiden Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$
   und die Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ des $\mathbb{R}^2$.
   a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.
   b) Begründen Sie, weshalb
   $$f(v_1) = e_1, \quad f(v_2) = e_2$$
   eindeutig eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ festlegt.
   c) Bestimmen Sie die $f$ bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellende Matrix.
   d) Bestimmen Sie die $f$ bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ darstellende Matrix.
   e) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für den Wechsel von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.
   f) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für den Wechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$.

2. *Normal form*
   Let $V, W$ be finite dimensional vector spaces over a field $K$ with $\dim(V) = \dim(W) = n$ and $f : V \to W$ linear. Let $v_1, \ldots, v_r \in V$ such that
   $$w_1 = f(v_1), \ldots, w_r = f(v_r)$$
   form a basis of Range$(f)$.
   a) Prove that $(v_1, \ldots, v_r)$ are linearly independent.
   b) Assume $r = n$ and prove that
   $$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_r), \quad \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_r)$$
   are a basis of $V$ and $W$, respectively. Determine the matrix for $f$ relative to $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$.
   c) Assume $r < n$ and choose $v_{r+1}, \ldots, v_n \in \text{Kern}(f)$, $w_{r+1}, \ldots, w_n \in W$ such that
   $$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n), \quad \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$$
   are a basis of $V$ and $W$, respectively. Determine the matrix for $f$ relative to $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$.