Übung zu Matrizen

1. *Matrizenkalkül*
   Berechnen Sie folgende Matrizen- und Matrix-Vektor-Produkte.

   a, $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix}$ b, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ c, $\begin{pmatrix} -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

   d, $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e, $\begin{pmatrix} 2 & 2i & 1 \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \\ 0 \end{pmatrix}$ f, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & i \\ 2 & -2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

   Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse selbstständig.

2. *Matrizenmultiplikation*

   a) Sei $E_n \in K^{n\times n}$ die Einheitsmatrix mit Einträgen
   $$(E_n)_{ij} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$
   Zeigen Sie für alle $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$
   $$AE_n = A \quad \text{und} \quad E_nB = B.$$

   b) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB \neq BA$ an.

3. *Rotation matrices*

   a) Let $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ and consider $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ with $f(x) = Ax$ and $g(x) = Bx$ for all $x \in \mathbb{R}^2$. Determine the matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ such that
   $$(f \circ g)(x) = Cx, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

   b) Visualize the action of the matrix
   $$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi),$$
   on a vector $x \in \mathbb{R}^2$.

   c) Compute the matrix product $R_\psi R_\varphi$ for $\psi, \varphi \in [0, 2\pi)$ and use your result to justify the addition and subtraction theorem of the sine and cosine.