Beweis zum Austauschsatz von Steinitz

Satz:
Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Ist $(w_1, \ldots, w_k)$ linear unabhängig in V, so ist $k \leq n$ und es gibt $n-k$ Vektoren aus den Basisvektoren, die zusammen mit $(w_1, \ldots, w_k)$ eine Basis von V bilden.

Beweis durch Induktion über k:

- Induktionsanfang $k = 1$:
  Sei $w_1 \in V$ linear unabhängig, d.h. $w_1 \neq 0$. Es gilt $1 \leq n$ und da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist, existieren eindeutige Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ so, dass
  $$w_1 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$
  Da $w_1 \neq 0$ gilt, muss mindestens ein $\alpha_j \neq 0$ sein. Nachdem Austauschlemma ist damit aber auch
  $$(v_1, \ldots, v_{j-1}, w_1, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$
  eine Basis von V. Also wurde w_1 durch $n-1$ Basisvektoren zu einer Basis von V ergänzt.

- Induktionsannahme:
  Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle $l < k$ gilt, d.h. $l \leq n$ und jeder Tupel $(w_1, \ldots, w_l)$ linear unabhängiger Vektoren in V kann durch $n-l$ Vektoren aus $(v_1, \ldots, v_n)$ zu einer Basis von V ergänzt werden.

- Induktionsschritt $k-1 \to k$:
  Seien $(w_1, \ldots, w_k)$ linear unabhängig in V.

  Wir müssen zuerst zeigen, dass $k \leq n$ gilt. Nach der Induktionsannahme ist $k-1 \leq n$, d.h. wir müssen ausschließen, dass $k-1 = n$ gilt. Angenommen dies würde gelten, dann wären die Vektoren $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ bereits eine Basis von V, da sie nach der Induktionsannahme durch keinen Vektor mehr ergänzt werden müssen. Da eine Basis aber maximal linear unabhängig ist, wären die Vektoren $(w_1, \ldots, w_k)$ für alle $w_k \in V$ linear abhängig. Damit folgt durch Widerspruch, dass $k-1 < n$.

  Für die Ergänzung der Basis verwenden wir wieder die Induktionsannahme: Für $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ existieren $n+1-k$ Vektoren aus $(v_1, \ldots, v_n)$, die $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ zu einer Basis ergänzen. Es bleibt zu zeigen, dass einer dieser Vektoren mit w_k ausgetauscht werden kann.

  Wir benennen die Vektoren, die $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ ergänzen mit $v_1^*, \ldots, v_{n+1-k}^*$. Da
  $$(w_1, \ldots, w_{k-1}, v_1^*, \ldots, v_{n+1-k}^*)$$
  eine Basis von V ist, existieren Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1-k} \in K$ so, dass
  $$w_k = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{k-1} w_{k-1} + \beta_1 v_1^* + \ldots + \beta_{n+1-k} v_{n+1-k}^*$$
  und wir müssen zeigen, dass ein $\beta_j \neq 0$ existiert. Dies folgt aber direkt aus der linearen Unabhängigkeit von $(w_1, \ldots, w_k)$: Angenommen $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1-k} = 0$, dann wäre
  $$w_k = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{k-1} w_{k-1}$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in K$, d.h. w_k kann als Linearkombination von $(w_1, \dots, w_{k-1})$ geschrieben werden. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Somit existiert ein $\beta_j \neq 0$ und nach dem Austauschlemma, kann v_j^* durch w_k ersetzt werden und wir erhalten wieder eine Basis. Diese Basis besteht dann aus $(w_1, \dots, w_k)$ und den $n-k$ Basisvektoren $(v_1^*, \dots, v_{j-1}^*, v_{j+1}^*, \dots v_{n+1-k}^*)$.