en remarquant que la fonction φx ne contient que des puissances impaires de la variable et en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$.

On en conclut immédiatement que ce terme équivaut à

$$\pm\left(\varphi\pi-\varphi''\pi\cdot\frac{1}{n^2}+\varphi^{\text{IV}}\pi\cdot\frac{1}{n^4}-\varphi^{\text{VI}}\pi\cdot\frac{1}{n^6}+\varphi^{\text{VIII}}\pi\cdot\frac{1}{n^8}+\text{etc.}\right).$$

Si l'on substitue cette valeur de $\frac{s}{n}$ dans l'équation (B), en prenant le signe + lorsque le terme de cette équation est de rang impair, et le signe — lorsque n est pair; on aura en général $S(\varphi x.\sin. nx.dx)$ pour le coëfficient de $\sin. nx$; on parvient de cette manière à un résultat très-remarquable exprimé par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\varphi x=\sin. x\,S(\sin. x.\varphi x.dx)+\sin. 2x\,S(\sin. 2x\,\varphi x\,dx)\\ +\sin. 3x\,S(\sin. 3x.\varphi x\,dx).....+\sin. ix\,S(\sin. ix\,\varphi x\,dx)+\text{etc.};\end{aligned}\tag{D}$$

le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction φx, si l'on effectue les intégrations depuis $x=0$, jusqu'à $x=\pi$.

220.

On voit par-là que les coëfficients $a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots$ etc., qui entrent dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=a\sin. x+b\sin. 2x+c\sin. 3x+d\sin. 4x+\text{etc.}$$

et que nous avons trouvés précédemment par la voie des éliminations successives, sont des valeurs intégrales définies exprimées par le terme général $S(\sin. ix.\varphi x\,dx)$, i étant le numéro du terme dont on cherche le coëfficient. Cette remarque est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y=\sin. x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle répond une valeur de φx, et une valeur de $\sin. x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x . \sin. x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, donnera la valeur exacte du coëfficient de $\sin. x$; et quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à φx, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coëfficient de $\sin. x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coëfficient suivant b ou $S(\varphi x . \sin. 2x\, dx)$.

Il faut en général, pour construire les valeurs des coëfficients $a\, b\, c\, d\, e \ldots$ etc., imaginer que les courbes, dont les équations sont

$$y = \sin. x,\ y = \sin. 2x,\ y = \sin. 3x,\ y = \sin. 4x, \text{ etc.},$$

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$; et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y=\varphi x$. Les équations des courbes réduites, sont:

$$y=\sin. x . \varphi x, y=\sin. 2x . \varphi x, y=\sin. 3x . \varphi x, y=\sin. 4x . \varphi x .. \text{etc.}$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, seront les valeurs des coëfficients $a\ b\ c\ d$ etc., dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi \varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{ etc.}$$

221.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 220), en déterminant immédiatement les quantités $a_1 a_2 a_3 \ldots a_j$ etc., dans l'équation

$$\varphi x = a_1 \sin. x + a_2 \sin. 2x + a_3 \sin. 3x + \ldots a_j \sin. jx + \ldots \text{etc.};$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par $\sin. ix.dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, on aura

$$S(\varphi x . \sin. ix.dx) = a_1 S(\sin. x \sin. ix.dx) + a_2 S(\sin. 2x . \sin. ix.dx) \\ + \ldots a_j S(\sin. jx . \sin. ix.dx) + \ldots \text{ etc.}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i S(\sin. ix . \sin. ix\, dx)$; 2° que la valeur de $S(\sin. ix . \sin. ix.dx)$ est $\frac{1}{2}\pi$; d'où l'on conclura la valeur de a_i, qui est $\frac{S(\varphi x.\sin. ix.dx)}{\frac{1}{2}\pi}$. Tout se réduit à considérer la valeur des intégrales qui entrent dans le second membre, et à démontrer les deux propositions précédentes. L'intégrale $2\,S(\sin. jx.\sin.\ ix.dx)$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et dans laquelle i et j sont des nombres entiers, est

$$\frac{1}{i-j}\sin.\ (\overline{i-j}.x) - \frac{1}{i+j}\sin.\ (\overline{i+j}\,x) + C.$$

L'intégrale devant commencer lorsque $x=0$, la constante C est nulle, et les nombres i et j étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra nulle lorsqu'on fera $x=\pi$; il s'ensuit que chacun des termes tels que

$$a_1\,S(\sin. x\sin.\ ix.dx),\ a_2\,S(\sin.\ 2x.\sin.\ ix.dx),\ a_3\,S(\sin.\ 3\,x\sin.\ ix.dx)\ \text{etc.}$$

s'évanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et j seront différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et j sont égaux, car le terme $\frac{1}{i-j}\sin.\ (\overline{i-j}\,x)$ auquel se réduit l'intégrale, devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est π. On a parconséquent $2\,S(\sin.\ ix.\sin.\ ix.dx)=\pi$; on obtient ainsi de la manière la plus briève, les valeurs de $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_i$ etc. qui sont :

$$a_1 = \frac{S(\varphi x.\sin. x.dx)}{\frac{1}{2}\pi},\quad a_2 = \frac{S(\varphi x.\sin.\ 2\,x.dx)}{\frac{1}{2}\pi},$$

$$a_3 = \frac{S(\varphi\,x.\sin.\ 3\,x.dx)}{\frac{1}{2}\pi} \ldots\quad a_i = \frac{S(\varphi x.\sin.\ ix.dx)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En les substituant on a

$$\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = \sin. x\, S(\varphi x \sin. x . dx) + \sin. 2x\, S(\varphi x . \sin. 2x . dx)$$
$$+ \sin. 3x\, S(\varphi . x \sin. 3x . dx) \ldots + \sin. ix\, S(\varphi x \sin. ix . dx)$$
$$+ \text{ etc.}$$

222.

Le cas le plus simple est celui où la fonction donnée a une valeur constante pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre o et π; dans ce cas, l'intégrale $\int \sin. ix\, dx$ est égale à $\frac{2}{i}$ si le nombre i est impair, et égal à o si le nombre i est pair. On en déduit l'équation

$$\tfrac{1}{2}\pi = \sin. x + \tfrac{1}{3}\sin. 3x + \tfrac{1}{5}\sin. 5x + \tfrac{1}{7}\sin. 7x + \tfrac{1}{9}\sin. 9x + \text{etc.}$$

que l'on a trouvée précédemment.

Il faut remarquer que lorsqu'on a développé une fonction φx en une suite de sinus d'arcs multiples la valeur de la série $a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x +$ etc. est la même que celle de la fonction φx tant que la variable x est comprise entre o et π; mais cette égalité cesse en général d'avoir lieu lorsque la valeur de x surpasse le nombre π.

Supposons que la fonction dont on demande le développement soit x, on aura, d'après le théorême précédent,

$$\tfrac{1}{2}\pi x = \sin. x \int x \sin. x\, dx + \sin. 2x \int x \sin. 2x\, dx$$
$$+ \sin. 3x \int x \sin. 3x\, dx + \sin. 4x \int x \sin. 4x\, dx + \text{etc.}$$

L'intégrale $\int_0^\pi x \sin. ix\, dx$ équivaut à $\pm \frac{\pi}{i}$, les indices o et π qui sont joints au signe $\int$ font connaître les limites de l'intégrale ; le signe + doit être choisi lorsque i est impair, et le signe — lorsque i est pair. On aura donc l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}x = \sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \frac{1}{5}\sin. 5x - \frac{1}{7}\sin. 7x + \text{etc.}$$

223.

On développera aussi en séries de sinus d'arcs multiples les fonctions différentes de celles où il n'entre que des puissances impaires de la variable. Pour apporter un exemple qui ne laisse aucun doute sur la possibilité de ce développement, nous choisirons la fonction cos. x, qui ne contient que des puissances paires de x, et qu'on développera sous la forme suivante :

$$a\sin. x + b\sin. 2x + c\sin. 3x + d\sin. 4x + e\sin. 5x + \text{etc.}$$

quoiqu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires de la même variable. On aura en effet, d'après le théorême précédent,

$$\frac{1}{2}\pi\cos. x = \sin. x\int\cos. x\sin. x\,dx$$
$$+\sin. 2x\int\cos. x\sin. 2x\,dx + \sin. 3x\int\cos. x\sin. 3x\,dx + \text{etc.}$$

L'intégrale $\int\cos. x\sin. ix\ dx$, équivaut à zéro lorsque i est un nombre impair, et à $\frac{2i}{i^2-1}$, lorsque i est un nombre pair. En supposant successivement $i=2, 4, 6, 8$, etc. on aura la série toujours convergente :

$$\frac{1}{4}\pi\cos. x = \frac{2}{1.3}\sin. 2x + \frac{4}{3.5}\sin. 4x + \frac{6}{5.7}\sin. 6x$$
$$+\frac{8}{7.9}\sin. 8x + \frac{10}{9.11}\sin. 10x + \text{etc.}$$

ou $\cos. x = \frac{2}{\pi} \Big\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) \sin. 2x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \sin. 4x$

$+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \sin. 6x + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) \sin. 8x + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \sin. 10x + \text{etc.}$

Ce résultat a cela de remarquable qu'il offre le développement du cosinus en une suite de fonctions dont chacune ne contient que des puissances impaires. Si l'on fait dans l'équation précédente $x = \frac{1}{4}\pi$, on trouvera :

$$\frac{1}{4} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.} \right)$$

Cette dernière série est connue (*introd. ad analysin. infinit. cap. X*).

224.

On peut employer une analyse semblable pour développer une fonction quelconque en série de cosinus d'arcs multiples. Soit φx la fonction dont on demande le développement, on écrira :

$$\varphi x = a_0 \cos. 0x + a_1 \cos. x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots a_i \cos. ix \ldots + \text{etc.} \quad (m)$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $\cos. jx$ et que l'on intègre chacun des termes du second membre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; il est facile de s'assurer que la valeur de cette intégrale sera nulle, excepté pour le seul terme qui contient déja $\cos. jx$. Cette remarque donne immédiatement le coëfficient a_j; il suffira en général de considérer la valeur de l'intégrale $\int \cos. jx \cos. ix\, dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, en supposant que j et i sont des nombres entiers. On a

$$\int \cos. jx \cos. ix\, dx = \frac{1}{2(j+i)} \sin. \overline{j+i}\, x + \frac{1}{2(j-i)} \sin. \overline{j-i}\, x + c.$$

Cette intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, est évidemment nulle toutes les fois que j et i sont deux nombres différents. Il n'en est pas de même lorsque ces deux nombres sont égaux. Le dernier terme $\frac{1}{2(j-i)}$ sin. $\overline{j-i}\,x$ devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est $\frac{1}{2}\pi$, lorsque l'arc x est égal à π. Si donc on multiplie les deux termes de l'équation précédente (m) par cos. ix, et que l'on intègre depuis 0 jusqu'à π, on aura : $\int\varphi x \cos. ix\, dx = \frac{1}{2}\pi a_i$, équation qui fera connaître la valeur du coëfficient a_i. Pour trouver le premier coëfficient a_0, on remarquera que dans l'intégrale

$$\frac{1}{2(j+i)}\sin.\overline{j+i}\,x+\frac{1}{2(j-i)}\sin.\overline{j-i}\,x\,,$$

si $j=0$ et $i=0$ chacun des termes devient $\frac{0}{0}$, et la valeur de chaque terme est $\frac{1}{2}\pi$; ainsi l'intégrale $\int\cos. jx\cos. ix\,dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$ est nulle lorsque les deux nombres entiers j et i sont différents ; elle est $\frac{1}{2}\pi$ lorsque les deux nombres j et i sont égaux, mais différents de zéro, elle est égale à π lorsque j et i sont l'un et l'autre égaux à zéro, on obtient ainsi l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=\frac{1}{2}\int_0^\pi\varphi x\,dx+\cos. x\int_0^\pi\varphi x\cos. x\,dx$$

$$+\cos. 2x\int_0^\pi\varphi x\cos. 2x\,dx+\cos. 3x\int_0^\pi\varphi x\cos. 3x\,dx+\text{etc.}\quad(\text{n})$$

Ce théorême et le précédent conviennent à toutes les fonctions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement.

225.

Si la fonction proposée dont on demande le développement en cosinus d'arcs multiples est la variable x elle-même; on écrira l'équation

$$\tfrac{1}{2}\pi x = a_0 + a_1 \cos. x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots + a_i \cos. ix + \text{etc.}$$

et l'on aura, pour déterminer un coëfficient quelconque a_i, l'équation $a_i = \int_0^\pi x \cos. ix\, dx$. Cette intégrale a une valeur nulle lorsque i est un nombre pair, et est égal à $-\frac{i^2}{2}$ lorsque i est impair. On a en même temps $a_0 = \frac{1}{4}\pi^2$. On formera donc la série suivante,

$$x = \frac{1}{2}\pi - 4\frac{\cos. x}{\pi} - 4\frac{\cos. 3x}{3^2\pi} - 4\frac{\cos. 5x}{5^2\pi} - 4\frac{\cos. 7x}{7^2\pi} - \text{etc.}$$

On peut remarquer ici que nous sommes parvenus à trois développements différents de $\frac{1}{2}x$, savoir :

$$\frac{1}{2}x = \sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \frac{1}{5}\sin. 5x - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{\pi}\sin. x + \frac{2}{3^2\pi}\sin. 3x + \frac{2}{5^2\pi}\sin. 5x + \frac{2}{7^2\pi}\sin. 7x + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\cos. x - \frac{2}{3^2\pi}\cos. 3x - \frac{2}{5^2\pi}\cos. 5x - \text{etc.}$$

Il faut remarquer que ces trois valeurs de $\frac{1}{2}x$ ne doivent point être considérées comme égales, abstraction faite de toutes les valeurs de x; les trois développements précédents n'ont une valeur commune que lorsque la variable x est comprise entre o et $\frac{1}{2}\pi$. La construction des valeurs de ces trois séries et la comparaison des lignes dont elles expriment les ordonnées rendraient sensibles la coïncidence et la distinction alternatives des valeurs de ces fonctions.

Pour donner un second exemple du développement d'une fonction en série de cosinus d'arcs multiples, nous choisirons la fonction sin. x qui ne contient que des puissances impaires de la variable, et nous nous proposerons de la développer sous la forme

$$a + b\cos. x + c\cos. 2x + d\cos. 3x + \text{etc.}$$

En faisant à ce cas particulier l'application de l'équation générale, on trouvera, pour l'équation cherchée,

$$\frac{1}{4}\pi\sin. x = \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2x}{1.3} - \frac{\cos. 4x}{3.5} - \frac{\cos. 6x}{5.7} - \frac{\cos. 8x}{7.9} - \text{etc.}$$

On parvient ainsi à développer une fonction qui ne contient que des puissances impaires en une série de cosinus dans laquelle il n'entre que des puissances paires de la variable. Si on donne à x la valeur particulière $\frac{1}{2}\pi$, on trouvera :

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \text{etc.}$$

Or, de l'équation connue

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

On tire

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{etc.}$$

et aussi

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{11.13} - \frac{1}{13.15} - \text{etc.}$$

en ajoutant ces deux résultats, on a, comme précédemment,

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} - \frac{1}{11.13} + \text{etc.}$$

226.

L'analyse précédente donnant le moyen de développer une fonction quelconque en série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, nous l'appliquerons facilement au cas où la fonction à développer a des valeurs déterminées, lorsque la variable est comprise entre de certaines limites et a des valeurs nulles, lorsque la variable est comprise entre d'autres limites. Nous nous arrêterons à l'examen de ce cas particulier, parce qu'il se présente dans les questions physiques qui dépendent des équations aux différences partielles, et qu'il avait été proposé autrefois comme un exemple des fonctions qui ne peuvent être développées en sinus ou cosinus d'arcs multiples. Supposons donc que l'on ait à réduire en une série de cette forme une fonction dont la valeur est constante, lorsque x est comprise entre 0 et α, et dont toutes les valeurs sont nulles lorsque x est comprise entre α et π. On emploiera l'équation générale (m) dans laquelle les intégrales doivent être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Les valeurs de φx qui entrent sous le signe $\int$