de droites perpendiculaires; en sorte que cette ligne est la limite des différentes courbes que l'on obtiendrait en augmentant successivement le nombre des termes.

SECTION III.

Remarques sur ces séries.

179.

On peut envisager ces mêmes équations sous un autre point de vue, et démontrer immédiatement l'équation

$$\frac{\pi}{4}=\cos. x-\frac{1}{3}\cos. 3x+\frac{1}{5}\cos. 5x-\frac{1}{7}\cos. 7x+\frac{1}{9}\cos. 9x-\text{etc.}$$

Le cas ou x est nulle se vérifie par la série de Léibnitz,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}$$

Ensuite on supposera que le nombre des termes de la série

$$\cos. x-\frac{1}{3}\cos. 3x+\frac{1}{5}\cos. 5x-\frac{1}{7}\cos. 7x+\text{etc.}$$

au lieu d'être infini est déterminé et égal à m. On considérera la valeur de cette suite finie comme une fonction de x et de m. On réduira la valeur de la fonction en une série ordonnée suivant les puissances négatives de m; et l'on reconnaîtra que cette valeur approche d'autant plus d'être constante et indépendante de x, que m est un plus grand nombre.

Soit y la fonction cherchée qui est donnée par l'équation;

$$y=\cos. x-\frac{1}{3}\cos. 3x+\frac{1}{5}\cos. 5x-\frac{1}{7}\cos. 7x+\ldots.+\frac{1}{2m-1}\cos. \overline{2m-1}\,x,$$

le nombre m des termes étant supposé pair. Cette équation différenciée par rapport à x, donne

$$-\frac{dy}{dx} = \sin. x - \sin. 3x + \sin. 5x - \sin. 7x \ldots + \sin. \overline{2m-3}.x - \sin. \overline{2m-1}.x;$$

en multipliant par $2 \sin. 2x$, on a

$$-2\frac{dy}{dx} \sin. 2x = 2 \sin. x . \sin. 2x - 2 \sin. 3x . \sin. 2x + 2 \sin. 5x . \sin. 2x \ldots + 2 \sin. \overline{2m-3}\, x \sin. 2x - 2 \sin. \overline{2m-1}\, x . \sin 2x.$$

Chaque terme du second membre étant remplacé par la différence de deux cosinus, on en conclura:

$$\begin{aligned}
-2\frac{dy}{dx} \sin. 2x = {} & \cos. (-x) - \cos. 3x \\
& - \cos. x + \cos. 5x \\
& + \cos. 3x - \cos. 7x \\
& - \cos. 5x + \cos. 9x \\
& + \cos. 7x - \cos. 11x \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \cos. \overline{2m-5}x - \cos. \overline{2m-1}x \\
& - \cos. \overline{2m-3}x + \cos. \overline{2m+1}\, x.
\end{aligned}$$

Le second membre se réduit à $\cos. \overline{2m+1}\, x - \cos. \overline{2m-1}\, x$ ou $-2 \sin. 2mx . \sin. x$; donc

$$y = \frac{1}{2}\int\left(dx . \frac{\sin. 2mx}{\cos. x}\right).$$

180.

On intégrera le second membre par parties, en distinguant dans l'intégrale le facteur sin. $2mx.dx$, qui doit être intégré successivement, et le facteur $\frac{1}{\cos. x}$ ou sec. x que l'on doit différencier successivement; désignant les résultats de ces différenciations par sec.' x, sec.'' x, sec.''' $x, \ldots$ etc., on aura $2y =$ const. $- \frac{1}{2m} \cdot \cos. 2mx . \sec. x$

$$+ \frac{1}{2^2 . m^2} \sin. 2mx \sec' x - \frac{1}{2^3 . m^3} \cos. 2mx \sec.'' x + \text{etc.}$$

ainsi la valeur de y ou

$$\cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x \ldots + \frac{1}{2m-1}\cos. \overline{2m-1}\,x,$$

qui est une fonction de x et m, se trouve exprimée par une série infinie; et il est manifeste que plus le nombre m augmente, plus la valeur de y approche de celle de la constante. C'est pourquoi, lorsque le nombre m est infini, la fonction y a une valeur déterminée qui est toujours la même, quelle que soit la valeur positive de x, moindre que $\frac{1}{2}\pi$. Or, si l'on suppose l'arc x nul, on a

$$y = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.},$$

qui équivaut à $\frac{1}{4}\pi$. Donc on aura généralement $\frac{1}{4}\pi = \cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \frac{1}{9}\cos. 9x - \text{etc.}$ (b).