tion $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$. On connaît ainsi la route que suit la chaleur qui sort du foyer A. Elle se propage dans le sens des x, et en même temps elle se décompose en deux parties, dont l'une se dirige vers une des arêtes, tandis que l'autre partie continue de s'éloigner de l'origine, pour être décomposée comme la précédente et ainsi de suite à l'infini. La surface que nous considérons est engendrée par la courbe trigonométrique, qui répond à la base A, et se meut perpendiculairement à l'axe des x en suivant cet axe, pendant que chacune de ses ordonnées décroît à l'infini, proportionnellement aux puissances successives d'une même fraction.

On tirerait des conséquences analogues, si les températures fixes de la base A étaient exprimées par le terme

$$b \cos. 3y \text{ ou } c \cos. 5y \text{ etc.};$$

et l'on peut, d'après cela, se former une idée exacte du mouvement de la chaleur dans les cas plus généraux; car on verra par la suite que ce mouvement se décompose toujours en une multitude de mouvements élémentaires, dont chacun s'accomplit comme s'il était seul.

SECTION II.

Premier exemple de l'usage des séries trigonométriques dans la théorie de la chaleur.

171.

Nous reprendrons maintenant l'équation

$$1 = a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}.$$

dans laquelle il faut déterminer les coëfficients a, b, c, d, etc. Pour que cette équation subsiste, il est nécessaire que les constantes satisfassent aux équations que l'on obtient par des différentiations successives, ce qui donne les résultats suivants :

$$
\begin{aligned}
1 &= a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}\\
0 &= a \sin. y + 3\, b \sin. 3y + 5\, c \sin. 5y + 7\, d \sin. 7y + \text{etc.}\\
0 &= a \cos. y + 3^2 b \cos. 3y + 5^2 c \cos. 5y + 7^2 d \cos. 7y + \text{etc.}\\
0 &= a \sin. y + 3^3 b \cos. 3y + 5^3 c \cos. 5y + 7^3 d \cos. 7y + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

ainsi de suite à l'infini.

Ces équations devant avoir lieu lorsque $x = 0$, on aura

$$
\begin{aligned}
1 &= a + b + c + d + e + f + g + \ldots \text{ etc.}\\
0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + \ldots \text{ etc.}\\
0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + \ldots \text{ etc.}\\
0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \ldots \text{ etc.}\\
0 &= a + 3^8 b + 5^8 c + \ldots \text{ etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Le nombre de ces équations est infini comme celui des indéterminées $a, b, c, d, e \ldots$ etc. La question consiste à éliminer toutes les inconnues, excepté une seule.

172.

Pour se former une idée distincte du résultat de ces éliminations, on supposera que le nombre des inconnues $a, b, c, d \ldots$ etc., est d'abord défini et égal à m. On emploiera les m, premières équations seulement, en effaçant tous les termes où se trouvent les inconnues qui suivent les m premières. Si l'on fait successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$, ainsi de suite, on trouvera dans chacune de ces suppositions, les valeurs des indéterminées. La quantité a, par exemple, recevra une valeur pour le cas de deux inconnues, une autre pour le cas de trois inconnues, ou pour le cas de quatre inconnues, ou successivement pour un plus grand nombre. Il en sera de même de l'indéterminée b, qui recevra autant de valeurs différentes que l'on aura effectué de fois l'élimination; chacune des autres indéterminées est pareillement susceptible d'une infinité de valeurs différentes. Or la valeur d'une des inconnues, pour le cas ou leur nombre est infini, est la limite vers laquelle tendent continuellement les valeurs qu'elle reçoit au moyen des éliminations successives. Il s'agit donc d'examiner si, à mesure que le nombre des inconnues augmente, chacune des valeurs $a, b, c, d, \ldots$ etc. ne converge point vers une limite finie, dont elle approche continuellement.

Supposons que l'on emploie les sept équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
1 &= a + b + c + d + e + f + g \\
0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + 13^2 g \\
0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + 13^4 g \\
0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + 13^6 g \\
0 &= a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + 13^8 g \\
0 &= a + 3^{10} b + 5^{10} c + 7^{10} d + 9^{10} e + 11^{10} f + 13^{10} g \\
0 &= a + 3^{12} b + 5^{12} c + 7^{12} d + 9^{12} e + 11^{12} f + 13^{12} g.
\end{aligned}
$$

Les six équations qui ne contiennent plus g, sont :

$$
\begin{aligned}
13^2 &= a(13^2-1^2)+b(13^2-3^2)+c(13^2-5^2)+d(13^2-7^2)+e(13^2-9^2)+f(13^2-11^2)\\
0 &= a(13^2-1^2)+3^2 b(13^2-3^2)+5^2 c(13^2-5^2)+7^2 d(13^2-7^2)+9^2 e(13^2-9^2)+11^2 f(13^2-11^2)\\
0 &= a(13^2-1^2)+3^4 b(13^2-3^2)+5^4 c(13^2-5^2)+7^4 d(13^2-7^2)+9^4 e(13^2-9^2)+11^4 f(13^2-11^2)\\
0 &= a(13^2-1^2)+3^6 b(13^2-3^2)+5^6 c(13^2-5^2)+7^6 d(13^2-7^2)+9^6 e(13^2-9^2)+11^6 f(13^2-11^2)\\
0 &= a(13^2-1^2)+3^8 b(13^2-3^2)+5^8 c(13^2-5^2)+7^8 d(13^2-7^2)+9^8 e(13^2-9^2)+11^8 f(13^2-11^2)\\
0 &= a(13^2-1^2)+3^{10} b(13^2-3^2)+5^{10} c(13^2-5^2)+7^{10} d(13^2-7^2)+9^{10} e(13^2-9^2)+11^{10} f(13^2-11^2). \qquad (c)
\end{aligned}
$$

En continuant l'élimination, on obtiendra l'équation finale en a, qui est :

$$a(13^2-1^2)(11^2-1^2)(9^2-1^2)(7^2-1^2)(5^2-1^2)(3^2-1^2)=13^2.11^2.9^2.7^2.5^2.3^2.1^2.$$

173.

Si l'on avait employé un nombre d'équations plus grand d'une unité, on aurait trouvé, pour déterminer a, une équation analogue à la précédente, ayant au premier membre un facteur de plus, savoir : 15^2-1^2, et au second membre 15^2, pour nouveau facteur. La loi à laquelle ces différentes valeurs de a sont assujéties est évidente, et il s'ensuit que la valeur de a, qui correspond à un nombre infini d'équations, est exprimée ainsi :

$$a=\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{9^2}{9^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot\frac{13^2}{13^2-1}\cdot \text{ etc.}$$

$$\text{ou } a=\frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{7.7}{6.8}\cdot\frac{9.9}{8.10}\cdot\frac{11.11}{10.12}\cdot\frac{13.13}{12.14}\cdots \text{ etc.}$$

Or cette dernière expression est connue et, suivant le théorème de Wallis, on en conclut $a=\frac{4}{\pi}$. Il ne s'agit donc maintenant que de connaître les valeurs des autres indéterminées.

174.

Les six équations qui restent après l'élimination de g peuvent être comparées aux six équations plus simples que l'on aurait employées, s'il n'y avait eu que six inconnues. Ces dernières équations diffèrent des équations (c), en ce que, dans celles-ci, les lettres f, e, d, c, b, a se trouvent multipliées respectivement par les facteurs

$$\frac{13^2-11^2}{13^2},\ \frac{13^2-9^2}{13^2},\ \frac{13^2-7^2}{13^2},\ \frac{13^2-5^2}{13^2},\ \frac{13^2-3^2}{13^2},\ \frac{13^2-1^2}{13^2}.$$

Il suit de là que si on avait résolu les six équations linéaires que l'on doit employer dans le cas de six indéterminées, et que l'on eût calculé la valeur de chaque inconnue, il serait facile d'en conclure la valeur des indéterminées de même nom, correspondantes au cas où l'on aurait employé sept équations. Il suffirait de multiplier les valeurs de $f, e, d, c, b, a,$ trouvées dans le premier cas par des facteurs connus. Il sera aisé, en général, de passer de la valeur de l'une des quantités, prise dans la supposition d'un certain nombre d'équations et d'inconnues, à la valeur de la même quantité, prise dans le cas où il y aurait une inconnue et une équation de plus. Par exemple, si la valeur de f trouvée dans l'hypothèse de six équations et six inconnues, est représentée par F, celle de la même quantité prise dans le cas d'une inconnue de plus, sera $F.\frac{13^2}{13^2-11^2}$. Cette même valeur, prise dans le cas de huit inconnues, sera, par la même raison,

$$F.\frac{13^2}{13^2-11^2}.\frac{15^2}{15^2-11^2}$$

et dans le cas de neuf inconnues, elle sera

$$F\,\frac{13^2}{13^2-11^2}\cdot\frac{15^2}{15^2-11^2}\cdot\frac{17^2}{17^2-11^2},$$

ainsi de suite. Il suffira de même de connaître la valeur de b, correspondante au cas de deux inconnues, pour en conclure celle de la même lettre qui correspond au cas de trois, quatre, cinq inconnues, etc. On aura seulement à multiplier cette première valeur de b par

$$\frac{5^2}{5^2-3^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-3^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-3^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-3^2}\cdots\text{ etc.}$$

Pareillement si l'on connaît la valeur de c pour le cas de trois inconnues, on multipliera cette valeur par les facteurs successifs

$$\frac{7^2}{7^2-5^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-5^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-5^2}\cdots\text{ etc.}$$

on calculera de même la valeur de d par le cas de quatre inconnues seulement, et on multipliera cette valeur par

$$\frac{9^2}{9^2-5^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-7^2}\cdot\frac{13^2}{13^2-7^2}\cdot\frac{15^2}{15^2-7^2}\cdots\text{ etc.}$$

Le calcul de la valeur de a est assujéti à la même règle, car si on prend cette valeur pour le cas d'une seule inconnue, et qu'on la multiplie successivement par

$$\frac{3^2}{3^2-1^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-1^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-1^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-1^2},$$

on trouvera la valeur finale de cette quantité.

175.

La question est donc réduite à déterminer la valeur de a dans le cas d'une inconnue, la valeur de b dans le cas de deux inconnues, celle de c dans le cas de trois inconnues, et ainsi de suite pour les autres inconnues.

Il est facile de juger, à l'inspection seule des équations et sans aucun calcul, que les résultats de ces éliminations successives doivent être

$$a = 1$$
$$b = \frac{1^2}{1^2-3^2}$$
$$c = \frac{1^2}{1^2-5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-5^2}$$
$$d = \frac{1^2}{1^2-7^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-7^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-7^2}$$
$$e = \frac{1^2}{1^2-9^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-9^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-9^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-9^2}.$$

176.

Il ne reste qu'à multiplier les quantités précédentes par les séries des produits qui doivent les compléter et que nous avons donnés (art. 174). On aura en conséquence, pour les valeurs finales, des inconnues $a, b, c, d, e, f,$ etc., les expressions suivantes :

$$a = 1.\quad \frac{3^2}{3^2-1^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-1^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-1^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-1^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-1^2}\ \text{etc.}$$
$$b = \frac{1^2}{1^2-3^2}\cdot\quad \frac{5^2}{5^2-3^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-3^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-3^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-3^2}\ \text{etc.}$$
$$c = \frac{1^2}{1^2-5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-5^2}\cdot\quad \frac{7^2}{7^2-5^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-5^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-5^2}\ \text{etc.}$$
$$d = \frac{1^2}{1^2-7^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-7^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-7^2}\cdot\quad \frac{9^2}{9^2-7^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-7^2}\ \text{etc.}$$
$$e = \frac{1^2}{1^2-9^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-9^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-9^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-9^2}\cdot\quad \frac{11^2}{11^2-9^2}\cdot\frac{13^2}{13^2-9^2}\ \text{etc.}$$
$$f = \frac{1^2}{1^2-11^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-11^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-11^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-11^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-11^2}\cdot\quad \frac{13^2}{13^2-11^2}\cdot\frac{15^2}{15^2-11^2}\ \text{etc.}$$

ou $a = +1 \cdot \frac{3.3}{2.3} \cdot \frac{5.5}{4.6} \cdot \frac{7.7}{6.8}$ etc.

$$b = -\frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{5.5}{2.8} \cdot \frac{7.7}{4.10} \cdot \frac{9.9}{6.12} \text{ etc.}$$

$$c = +\frac{1.1}{4.6} \cdot \frac{3.3}{2.8} \cdot \frac{7.7}{1.12} \cdot \frac{9.9}{4.14} \cdot \frac{11.11}{6.16} \text{ etc.}$$

$$d = -\frac{1.1}{6.8} \cdot \frac{3.3}{4.10} \cdot \frac{5.5}{2.12} \cdot \frac{9.9}{2.16} \cdot \frac{11.11}{4.18} \cdot \frac{13.13}{6.20} \text{ etc.}$$

$$e = +\frac{1.1}{8.10} \cdot \frac{3.3}{6.12} \cdot \frac{5.5}{4.14} \cdot \frac{7.7}{2.16} \cdot \frac{11.11}{2.20} \cdot \frac{13.13}{4.22} \cdot \frac{15.15}{6.24} \text{ etc.}$$

$$f = -\frac{1.1}{10.12} \cdot \frac{3.3}{8.14} \cdot \frac{5.5}{6.16} \cdot \frac{7.7}{4.18} \cdot \frac{9.9}{2.20} \cdot \frac{13.13}{2.24} \cdot \frac{15.15}{4.26} \cdot \frac{17.17}{6.28} \text{ etc.}$$

La quantité $\frac{1}{2}\pi$ ou le quart de la circonférence équivaut, suivant le théorême de Wallis, à

$$\frac{2.2}{1.2} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \frac{10.10}{9.11} \cdot \frac{12.12}{11.13} \cdot \frac{14.14}{13.15} \text{ etc.}$$

Si l'on remarque maintenant quelles sont, dans les valeurs de $a, b, c, d, e,$ etc., les facteurs que l'on doit écrire aux numérateurs et aux dénominateurs, pour y compléter la double série des nombres impairs et des nombres pairs, on trouvera que les facteurs à suppléer sont :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } b & \frac{3.3}{6} \\ \text{pour } c & \frac{5.5}{10} \\ \text{pour } d & \frac{7.7}{14} \\ \text{pour } e & \frac{9.9}{18} \\ \text{pour } f & \frac{11.11}{22} \end{array}\right\} \text{ et l'on en conclut } \left\{\begin{array}{l} a = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ b = -2 \cdot \frac{2}{3\pi} \\ c = 2 \cdot \frac{2}{5\pi} \\ d = -2 \cdot \frac{2}{7\pi} \\ e = 2 \cdot \frac{2}{9\pi} \\ f = -2 \cdot \frac{2}{11\pi} \end{array}\right.$$

177.

C'est ainsi qu'on est parvenu à effectuer entièrement les éliminations et à déterminer les coëfficients $a, b, c, d,$ etc., de l'équation

$$1 = a\cos.x + b\cos.3x + c\cos.5x + d\cos.7x + e\cos.9x, + \text{etc.}$$

La substitution de ces coëfficients, donne l'équation suivante :

$$\frac{\pi}{4} = \cos.y - \frac{1}{3}\cos.3y + \frac{1}{5}\cos.5y - \frac{1}{7}\cos.7y$$
$$+ \frac{1}{9}\cos.9y - \frac{1}{11}\cos.11y + \text{etc.}$$

Le second membre est une fonction de y, qui ne change point de valeur quand on donne à la variable y une valeur comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente, c'est-à-dire que, en mettant au lieu de y un nombre quelconque, et en poursuivant le calcul des coëfficients, on approche de plus en plus d'une valeur fixe, en sorte que la différence de cette valeur à la somme des termes calculés, devient moindre que toute grandeur assignable. Sans nous arrêter à cette démonstration, que le lecteur peut suppléer, nous ferons remarquer que la valeur fixe, dont on approche continuellement, est $\frac{1}{4}\pi$, si la valeur attribuée à y est comprise entre o et $\frac{1}{2}\pi$, mais qu'elle est $-\frac{1}{4}\pi$, si y est comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$; car, dans ce second intervalle, chaque terme de la série change de signe. En général la limite de la série est alternativement positive et négative; au reste, la convergence n'est point assez rapide pour procurer une approximation facile, mais elle suffit pour la vérité de l'équation.

178.

L'équation

$$y = \cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{etc.},$$

appartient à une ligne qui, ayant x pour abcisse et y pour ordonnée, est composée de droites séparées dont chacune est parallèle à l'axe et égale à la demi-circonférence. Ces parallèles sont placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, à la distance $\frac{1}{4}\pi$, et jointes par des perpendiculaires qui font elles-mêmes partie de la ligne. Pour se former une idée exacte de la nature de cette ligne, il faut supposer que le nombre des termes de la fonction

$$\cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \text{etc.}$$

reçoit d'abord une valeur déterminée. Dans ce derner cas l'équation

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \text{etc.}$$

appartient à une ligne courbe qui passe alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, en le coupant toutes les fois que l'abcisse x devient égale à l'une des quantités

$$0, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi. \text{ etc.},$$

a mesure que le nombre des termes de l'équation augmente, la courbe dont il s'agit tend de plus en plus à se confondre avec la ligne précédente, composée de droites parallèles et