$$(\omega,\ \omega + 2), \qquad \left(\omega,\ -\frac{1}{\omega}\right)$$

ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von $\varkappa^2 \varkappa'^2$. Hieraus folgt noch:

3. Jede Modulfunction, die durch $(\omega, \omega + 2)$ ungeändert bleibt und durch $\left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right)$ ihr Zeichen ändert, ist das Product von $(\varkappa'^2 - \varkappa^2)$ mit einer rationalen Function von $\varkappa^2 \varkappa'^2$.

4. Die Invariante $j(\omega)$ gehört zur Gruppe $\mathfrak{G}_0$ (§. 47) und daher der Satz:

Jede Modulfunction, welche durch die beiden Vertauschungen

$$(\omega,\ \omega + 1), \qquad \left(\omega,\ -\frac{1}{\omega}\right)$$

ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von $j(\omega)$.

Ausser diesen führen wir noch zwei andere Modulfunctionen ein.

Aus der Definition der Functionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ [§. 29, (10), (2)] ergiebt sich, wenn man die beiden Gleichungen §. 37, (3) mit einander multiplicirt:

$$(2) \quad f(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{\varkappa \varkappa'}}, \quad f_1(\omega) = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{\varkappa'^2}{\varkappa}}, \quad f_2(\omega) = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{\varkappa^2}{\varkappa'}},$$

$$(3) \qquad \frac{f_1(\omega)}{f(\omega)} = \sqrt[4]{\varkappa'}, \quad \frac{f_2(\omega)}{f(\omega)} = \sqrt[4]{\varkappa}.$$

Auf Grund von §. 41, (15), (16) definiren wir zwei Functionen $\gamma_2(\omega)$, $\gamma_3(\omega)$:

$$(4) \quad \begin{aligned} \gamma_2(\omega) &= \sqrt[3]{j(\omega)} = \sqrt[3]{2}^{\,3}\, \frac{1 - \varkappa^2 \varkappa'^2}{\sqrt[3]{\varkappa^4 \varkappa'^4}} \\ \gamma_3(\omega) &= \sqrt{j(\omega) - 27.64} = \frac{8(2 + \varkappa^2 \varkappa'^2)(\varkappa'^2 - \varkappa^2)}{\varkappa^2 \varkappa'^2}, \end{aligned}$$

welche nach (2) und (3) als eindeutige Functionen von ω folgendermaassen darstellbar sind:

$$(5) \quad \begin{aligned} \gamma_2(\omega) &= \frac{f(\omega)^{24} - 16}{f(\omega)^8} \\ \gamma_3(\omega) &= \frac{[f(\omega)^{24} + 8]\,[f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8]}{f(\omega)^8} \end{aligned}$$