La formule (104) subsiste dans le cas même où l'on y remplace m par $-m$. Seulement le second membre s'évanouit alors, dès que le nombre m devient supérieur à l'unité.

Lorsque, dans la formule (104), on prend $\theta = \frac{\pi}{2}$, on est ramené à l'équation (95). Si l'on prenait, au contraire, $\theta = \frac{\pi}{3}$, cette formule donnerait

$$
(105)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}} - \frac{1}{3^{2m+1}}\frac{1}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\ldots\ldots\ldots\right)\cos\frac{m\pi}{3}\\
&-\left(\frac{1}{2^{2m+1}}\frac{1}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}} - \frac{1}{4^{2m+1}}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{3}}-e^{-2\pi\sqrt{3}}}+\ldots\right)\sin\frac{m\pi}{3}\\
&=\frac{\pi^{2m+1}}{8}\mathcal{E}\frac{4}{e^{z}-2\cos z\sqrt{3}+e^{-z}}\frac{1}{((z^{2m+1}))};
\end{aligned}\right.
$$

puis on en conclurait : 1° en remplaçant m par -1,

$$
(106)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}} - \frac{3}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}} + \frac{5}{e^{\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}}-\ldots\\
&=\frac{1}{4\pi}-\left(\frac{1}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}} - \frac{2}{e^{2\pi\sqrt{3}}-e^{-2\pi\sqrt{3}}} + \frac{3}{e^{3\pi\sqrt{3}}-e^{-3\pi\sqrt{3}}}-\ldots\right)2\sqrt{3};
\end{aligned}\right.
$$

2° en remplaçant m par $-m$, et supposant le nombre m supérieur à l'unité,

$$
(107)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}} - \frac{3^{2m-1}}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)\cos\frac{m\pi}{3}\\
&+\left(\frac{2^{2m-1}}{e^{\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi\sqrt{3}}} - \frac{4^{2m-1}}{e^{2\pi\sqrt{3}}-e^{-2\pi\sqrt{3}}} + \frac{6^{2m-1}}{e^{3\pi\sqrt{3}}-e^{-3\pi\sqrt{3}}}-\ldots\right)\sin\frac{m\pi}{3}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Ajoutons que, si l'on remplace m par $3m$, on tirera des formules (105) et (107)

$$
(108)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}} - \frac{1}{3^{6m+1}}\frac{1}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\ldots\\
&=\frac{(-1)^m\pi^{6m+1}}{2}\mathcal{E}\frac{\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{6m+1}}{e^{z}-2\cos z\sqrt{3}+e^{-z}},
\end{aligned}\right.
$$

et

$$(109)\qquad \frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{3^{6m-1}}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\frac{5^{6m-1}}{e^{\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}}-\ldots=0.$$

On conclura, en particulier, de la formule (108), en prenant $m=0$,

$$(110)\qquad \frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}-\frac{\frac{1}{3}}{e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}+\frac{\frac{1}{5}}{e^{\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}}}-\ldots=\frac{\pi}{48}.$$

Parmi les diverses formules que nous venons d'établir, les unes fournissent immédiatement les sommes de certaines séries. Telles sont les formules (93), (94), (95) et suivantes. D'autres servent seulement à transformer les sommes des séries que renferment leurs premiers membres. Or, ces transformations seront souvent fort utiles pour le calcul numérique des sommes dont il s'agit. Ainsi, en particulier, concevons que l'on propose d'évaluer la somme

$$\frac{1}{x-\frac{1}{x}}-\frac{2}{x^2-\frac{1}{x^2}}+\frac{3}{x^3-\frac{1}{x^3}}-\frac{4}{x^4-\frac{1}{x^4}}+\ldots$$

pour une valeur de x très peu différente de l'unité, par exemple, pour $x=1,0001$. Comme, dans la série

$$\frac{1}{1,0001-\frac{1}{1,0001}},\quad -\frac{2}{(1,0001)^2-\left(\frac{1}{1,0001}\right)^2},\quad \frac{3}{(1,0001)^3-\left(\frac{1}{1,0001}\right)^3},\quad \ldots,$$

le terme dont le rang est indiqué par le nombre 140000, savoir:

$$\frac{140000}{(1,0001)^{140000}-\left(\frac{1}{1,0001}\right)^{140000}},$$

surpasse un dixième, il est clair que, pour obtenir à un dixième près et par un calcul direct la somme demandée, il faudra évaluer environ cent quarante mille termes. Par conséquent, le calcul direct de la somme demandée sera impraticable. Mais il est aisé de transformer