Vorwort

Dieses Buch führt seine Leser auf einen packenden Streifzug durch einige der wichtigsten und leistungsfähigsten Gebiete zeitgenössischer numerischer Mathematik. Ein erstes ungewöhnliches Merkmal dieses Streifzugs ist seine Gliederung nach Problemen und nicht nach Methoden: Es lohnt wirklich zu begreifen, dass numerische Probleme oft zu einer großen Methodenvielfalt führen. So lösen wir beispielsweise ein Irrfahrtsproblem (Kapitel 6) mit neun verschiedenen Methoden, die so unterschiedlich sind wie hochdimensionale lineare Algebra, eine von symbolischen Algorithmen gelieferte Dreitermrekursion, elliptische Integrale oder Fourieranalysis. Dabei erhalten wir in IEEE-Arithmetik die volle Genauigkeit von rund 16 Ziffern und, ins Extrem getrieben, in Langzahlarithmetik 10 000 Ziffern.

Ein weiteres ungewöhnliches Merkmal ist unser sorgsames Bemühen, die Gültigkeit jeder einzelnen Ziffer eines numerischen Resultats stichhaltig zu rechtfertigen. Die dabei eingesetzten Methoden reichen von sorgfältig entworfenen Computerexperimenten und aposteriorischen Fehlerschätzungen zu rechnergestützten Beweisen auf der Basis von Intervallarithmetik. In der Praxis reichen die ersten beiden Methoden üblicherweise völlig aus und gestatten das erwünschte Vertrauen ins Ergebnis. Intervallmethoden hingegen, obgleich mathematisch schön streng, würden oft keinen weiteren Nutzen bringen. Dennoch passiert es zuweilen, dass einer der besten Zugänge zu einem Problem einen Beweis entlang des Wegs liefert (so in Kapitel 4), ein Umstand von beträchtlichem mathematischen Interesse.

Ein Leitmotiv dieses Buchs ist, dass typischerweise zwei Optionen zur Lösung eines numerischen Problems vorliegen: Entweder lässt man eine einfache Methode mit roher Gewalt über Nacht und unbeaufsichtigt auf einem Höchstleistungsrechner mit Unmengen Speicherplatz vor sich hin werkeln oder man verbringt seine Tage mit vertieftem Nachdenken, unter Zuhilfenahme von mathematischer Theorie und einer guten Bibliothek, und hofft, eine raffiniertere Methode zu finden, die das Problem in weniger als einer Sekunde auf einer handelsüblichen Maschine löst. Selbstverständlich werden in der Praxis die beiden Optionen in Problemgröße und Schwierigkeit verschieden skalieren und die Wahl wird von Faktoren wie Arbeitszeit, Interesse, Wissen und den zur Verfügung stehenden Rechnern beinflusst werden. Ein Beispiel eines theoriegeleiteten Umwegs, welcher einen letztlich bei weitem effizienteren Lösungszugang liefert als der direkte Weg, ist auf dem Umschlag des Buchs illustriert. Die dem ersten Kapitel entnommene Graphik zeigt, dass viele reelle Probleme sehr viel einfacher werden, wenn man die reelle Achse verlässt und sich in die komplexe Ebene begibt.

Die Wegmarken unseres Streifzugs sind die 10 Probleme des fesselnden Wettbewerbs, mit dem Nick Trefethen aus Oxford im Februarheft der *SIAM News* 2002 die rechnerorientierte mathematische Öffentlichkeit herausforderte. Das Ergebnis jedes Problems ist eine reelle Zahl, von der die Teilnehmer einige Ziffern berechnen sollten. Die Auswertung war einfach: für jede korrekte Ziffer gab es einen Punkt, maximal 10 je Problem. Die volle Punktzahl lag also bei 100. Als der Staub sich einige Monate später legte, hatten 94 Teams aus 25 Ländern ihre Lösungen eingesendet. Zwanzig von ihnen hatten die volle Punktzahl erzielt, fünf weitere schafften 99 Punkte. Die ganze faszinierende Geschichte (mit der Nennung aller Gewinner) erzählen wir im einleitenden Kapitel „Die Geschichte“. Hier findet sich auch ein freimütiges Interview mit Nick Trefethen.

Dieser jetzt als *SIAM 100-Digit Challenge* bekannte Wettbewerb war aus verschiedenen Gründen bemerkenswert. Die Probleme waren recht verschiedenartig, so dass ein Experte in einem speziellen Gebiet zwar wenig Mühe mit einem oder zweien von ihnen hatte, er oder sie aber eine Menge Zeit investieren musste, um hinreichend viel zur Lösung der anderen Probleme zu lernen. Verlangt waren einzig und allein Ziffern, keine Beweise der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, keine Beweise der Konvergenz der Methode oder der Korrektheit des Resultats. Dennoch werden ernsthafte Teams einige Mühe in theoretische Untersuchungen gesteckt haben. Moderne Software hat auf diese Art Probleme einen enormen Einfluss und so ist es äußerst nützlich, die wichtigsten Softwarewerkzeuge an diesen Problemen zu erproben und auf diese Weise ihre Stärken und Schwächen kennenzulernen.

Dieses Buch eignet sich für Studenten nach Abschluss ihres Grundstudiums und könnte als Grundlage eines Seminars oder für Projektarbeiten dienen. Tatsächlich wurden die Probleme ursprünglich beginnenden Doktoranden der Universität Oxford gestellt, um sie aufzufordern, über die Grundtechniken der numerischen Mathematik hinauszudenken. Wir haben uns bemüht, die Vielfalt mathematischer und algorithmischer Werkzeuge zu zeigen, die ins Spiel kommen, wenn man der vorliegenden oder ähnlichen numerischen Herausforderung gegenübersteht:

- hochdimensionale numerische lineare Algebra
- rechnergestützte Funktionentheorie
- spezielle Funktionen und das arithmetisch-geometrische Mittel
- Fourieranalysis
- asymptotische Entwicklungen
- Konvergenzbeschleunigung
- Diskretisierungen mit exponentieller Konvergenzrate
- Computeralgebra
- globale Optimierung
- Monte-Carlo Verfahren und evolutionäre Algorithmen
- Chaos und Schattenorbits
- Stabilität und Genauigkeit
- Fehleranalyse: a priori und a posteriori
- Langzahl-, Signifikanz-, und Intervallarithmetik

Wir hoffen, unsere Leser zu einer umfassenden Sichtweise der Mathematik zu ermuntern. Denn eine Lehre dieses Wettbewerbs ist sicherlich, dass Überspezialisierung den Blick desjenigen zu sehr verengt, der ein ernsthaftes Interesse an computergestützten Berechnungen hat.

Die Kapitel zu den 10 Problemen können unabhängig voneinander gelesen werden. Da Konvergenzbeschleunigung eine wichtige Rolle für viele der Probleme spielt, haben wir eine Diskussion der grundlegenden Methoden als Anhang A mit aufgenommen. Anhang B fasst unsere Bemühungen zusammen, die Lösungen auf extrem hohe Genauigkeiten zu berechnen. Anhang C enthält Programmtext, mit welchem die 10 Probleme in einer Anzahl von Programmierumgebungen gelöst werden können. Und im Anhang D haben wir schließlich eine Auswahl weiterer Probleme zusammengestellt, welche als interessante Herausforderung derjenigen Leser dienen sollen, die einige der Techniken dieses Buchs gemeistert haben.

Ganz im Sinne reproduzierbarer numerischer Resultate finden sich die vollständigen lauffähigen Programmtexte aller Verfahren, Beispiele, Tabellen und Figuren sowie weiteres Material auf der begleitenden Webseite:

`www.numerikstreifzug.de`

Wir vier Autoren, aus vier Ländern, drei Kontinenten, zwei Hemisphären, kannten einander vor diesem Wettbewerb nicht und fanden erst über E-Mail zusammen, um dieses Buch vorzuschlagen und zu schreiben. Es erforderte tausende E-Mails und den regen Austausch von Dateien, Programmen und Zahlen. Diese Zusammenarbeit stellt einen unerwarteten Lohn für unsere Teilnahme an der *SIAM 100-Digit Challenge* dar.

Notation und Terminologie. Wenn wir davon sprechen, dass zwei reelle Zahlen auf d Ziffern übereinstimmen, müssen wir klarstellen, was gemeint ist. In diesem Buch sehen wir vom Runden ab und fordern, dass eine Beschneidung auf die ersten d signifikanten Ziffern die gleichen Ziffernfolgen ergibt. Für diesen Typ von Übereinstimmung in allen gezeigten Ziffern verwenden wir das Zeichen $\doteq$, wie etwa in $\pi \doteq 3.1415$.

Intervalle nahe beieinanderliegender Zahlen wie z.B. $[1.234567, 1.234589]$ notieren wir in diesem Buch kurz mit 1.2345_{67}^{89}.

Danksagungen. Zuallererst gedenken wir dankbar unseres unerwartet verstorbenen Kollegen John Boersma (1937–2004). Er hatte alle Kapitel mit dem scharfen Blick des Experten durchgesehen und uns auf viele Stellen hingewiesen, an denen unsere Darstellung oder die Mathematik verbessert werden konnte.

Wir danken Nick Trefethen für seinen Ansporn und Rat. Unser Dank gilt jenen zahlreichen Mathematikern und Mitgliedern anderer Teams, die ihre Lösungen und Einsichten mit uns geteilt haben. Insbesondere möchten wir Paul Abbott, Claude Brezinski, Brett Champion, George Corliss, Jean-Guillaume Dumas, Peter Gaffney, Yifan Hu, Rob Knapp, Andreas Knauf, Danny Lichtblau, Weldon Lodwick, Oleg Marichev, Fred Simons, Rolf Strebel, John Sullivan, Serge Tabachnikov und Michael Trott danken.

Wurde eine Lösungsmethode von mehreren Teams verwendet oder findet sie sich in der verfügbaren Literatur, so haben wir davon abgesehen, einzelne Namen zu erwähnen und zu würdigen. Wir wollen nirgends nahelegen, dass bestimmte Ideen von uns stammten, auch wenn sich etliche solche in diesem Buch finden. Obwohl jedem Kapitel der Name des Autors voransteht, der es letztlich geschrieben hat, kam es in jedem Fall unter substantieller Mitwirkung auch der anderen Autoren zustande.

Folkmar Bornemann, Technische Universität München

Dirk Laurie, Universität Stellenbosch, Südafrika

Stan Wagon, Macalester College, St. Paul, USA

Jörg Waldvogel, ETH Zürich, Schweiz

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Diese deutsche Ausgabe folgt dem korrigierten Zweitdruck (Frühjahr 2006) des englischen Originals [BLWW04]. Zwar wurde die eine oder andere Kleinigkeit aktualisiert bzw. ergänzt (vor allem in §9.6 und §10.7.1) und so manche erläuternde Fußnote oder vertiefende Literaturangabe hinzugefügt, größere Änderungen gab es jedoch nur im Kapitel 7: Für die exakte Lösung des Problems stelle ich nun statt der ursprünglich vom LinBox-Team verwendeten algebraischen Methoden die neue, im wesentlichen *numerische* und weitgehend in Maschinenarithmetik laufende Methode [Wan06] von Zhendong Wan vor. Diese entspricht besser dem Charakter des Buchs und verleiht der Argumentation im Bailey'schen Geleitwort zusätzliches Gewicht: Die exakte Lösung eines mathematischen Problems erfordert hier seine *numerische* Lösung auf die astronomische Genauigkeit von 194 779 Ziffern. Um Missverständnissen gleich vorzubeugen: Derartige Genauigkeiten sind ein Nebenschauplatz, im Vordergrund steht die Lösung schwieriger numerischer Probleme auf technische Genauigkeiten in Maschinenarithmetik.

Von ein paar Ausnahmen abgesehen, habe ich darauf verzichtet, für die im Literaturverzeichnis aufgeführten Lehrbücher systematisch nach deutschen Äquivalenten zu suchen. Es könnte sich hierbei ohnehin nur um eine subjektive Wahl handeln, welche die Favoriten von so manchem Lehrenden bzw. Lernendem ignoriert. Weiter wurde der Programmtext im englischen Original belassen. Eine Umbenennung der Variablennamen wäre viel zu aufwändig und zudem sehr fehlerträchtig gewesen — vom Sinn einmal ganz abgesehen, sind doch die zahlreichen Befehle von Maple, Mathematica, Matlab, Octave und PARI/GP ohnehin unabänderlich englisch. Schließlich habe ich bei der Angabe von Zahlen auch den Dezimalpunkt unangetastet gelassen und nicht durch das im Deutschen so traditionsreiche Dezimalkomma ersetzt. Meines Erachtens hat sich Letzteres (außerhalb des kaufmännischen Bereichs) durch die Allgegenwart von Computern ohnedies überlebt und sollte in der wissenschaftlichen Literatur nicht mehr verwendet werden.

Ich danke meinen Testlesern Carolyn Kalender und Bernhard Langwallner. Mit großer Sorgfalt haben sie zahlreiche Druckfehler und Formulierungsschwächen aufgespürt und hatten stets konstruktive Alternativen zur Hand. Sie sorgten auch dafür, dass mein Umgang mit der reformierten deutschen Rechtschreibung weniger willkürlich ausfiel.

Clemens Heine vom Springer-Verlag hatte die Idee, eine deutsche Ausgabe des Buchs zu verlegen. Die Zusammenarbeit mit ihm und Agnes Herrmann war stets so erfreulich, dass ich nie bereut habe, mich darauf eingelassen zu haben.

München, im Juli 2006. *Folkmar Bornemann*