Geleitwort

Jeder misst sich gern. Ich erinnere mich noch gut, wie ich im Februarheft der *SIAM News* 2002 erstmals etwas über die „SIAM 100-Digit Challenge“ las. Nick Trefethens kurzer Beitrag[1] stellte die 10 Probleme seiner Herausforderung vor und schloss mit der Bemerkung: „Hinweis: Es ist schwer! Sollte irgendjemand insgesamt 50 Ziffern herausfinden, werde ich beeindruckt sein.“ Für einen unverbesserlich computerorientierten Mathematiker wie mich war das ein unübersehbares Signal zum Angriff, eine unwiderstehliche Versuchung. Es lief darauf hinaus, dass ich mich gemeinsam mit zwei weiteren Kollegen beteiligte. Leider verfehlten wir bei wenigstens einem der 10 Probleme das korrekte Ergebnis und bekamen deshalb auch keine Anerkennung.[2] Dennoch war es eine sehr lohnende und vergnügliche Übung.

Das vorliegende Buch zeigt detailliert, wie jedes der Probleme gelöst werden kann, geschrieben von Autoren, welche anders als ich zu siegreichen Teams gehörten, die alle 10 Probleme erfolgreich gemeistert hatten. Ja besser noch: Für jedes Problem werden gleich mehrere Lösungsansätze vorgestellt, auch solche, die auf Wunsch eine Genauigkeit von tausenden Ziffern zu erreichen erlauben oder die Lösung weit größerer verwandter Probleme gestatten. Im Verlauf streifen die Autoren so gut wie jede wichtigere Technik moderner numerischer Mathematik: numerische lineare Algebra, numerische Quadratur, Grenzwertextrapolation, Fehlerkontrolle, Intervallarithmetik, Kurvenintegration, iterative Verfahren, globale Optimierung, Langzahlarithmetik, evolutionäre Algorithmen, Eigenwertlöser und vieles andere mehr (die Aufzählung ließe sich viel weiter fortsetzen).

[1] Auf S. 1 findet sich der vollständige Text.

[2] Jonathan Borwein verrät im *Mathematical Intelligencer*, in seiner lesenswerten Rezension [Bor05] der englischen Originalausgabe dieses Buchs, dass er und Greg Fee die anderen Mitglieder des Teams gewesen seien und dass sie 85 Ziffern abgeliefert hätten.

Dem vorliegenden Werk wird es beschieden sein, ein Klassiker der rechnerorientierten Wissenschaft zu werden — ein Festmahl in 10 Gängen. Vom übergeordneten Standpunkt aus bietet das Buch eine zwingende Antwort auf die Frage „Was ist numerische Mathematik?“. Wir begreifen durch dieses Buch, dass numerische Mathematik weit mehr ist als eine Ansammlung wilhelminischer Maximen über die Notwendigkeit sorgsamen Umgangs mit Rundungsfehlern. Stattdessen lernen wir aus erster Hand, welch großen und wachsenden Stamm raffinierter Algorithmen und mathematischer Kunstgriffe im Dienste effizienter Berechnungen dieses Gebiet umfasst. So hat Nick Trefethen einst bemerkt [Tre98], dass, „wenn Rundungsfehler verschwänden, 95% der numerischen Mathematik bestehen bliebe.“

Wie bereits gesagt, beschreiben die Autoren des Buchs Techniken, die in etlichen Fällen erweitert werden können, um die Resultate der 10 Probleme auf eine Genauigkeit von tausenden von Ziffern zu berechnen. Einige werden sich fragen, warum sich jemand um solch ungeheure Präzision kümmern wollte, wo doch in der physikalischen „Wirklichkeit“ kaum eine Größe auf mehr als 12 Ziffern genau bekannt sei. So reichte beispielsweise ein auf 20 Dezimalziffern korrekter Wert von π aus, um den Umfang eines Kreises um die Sonne mit den Ausmaßen der Erdbahn auf die Breite eines Atoms genau zu berechnen. Warum also sollte sich jemand darum kümmern wollen, ein numerisches Resultat auf 10 000 Ziffern genau zu berechnen?

In der Tat haben unlängst Arbeiten in der experimentellen Mathematik ein wichtiges Feld bereitet, auf dem numerische Resultate von sehr großer Präzision benötigt werden, in einigen Fällen auf eine Genauigkeit von tausenden von Dezimalziffern. Insbesondere werden Genauigkeiten auf dieser Skala benötigt, um Algorithmen zur Aufdeckung ganzzahliger Relationen[3] auf die Entdeckung neuer mathematischer Identitäten anzuwenden. Ein solcher Algorithmus liefert für n reelle Zahlen x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, welche in der Form hochgenauer Gleitkommazahlen vorliegen, n ganze Zahlen a_i, welche nicht alle null sind, so dass $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$.

Mit das bekannteste Beispiel dieser Art ist eine 1995 entdeckte neue Formel für π:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

Diese Formel wurde mit Hilfe eines Computerprogramms gefunden, welches den PSLQ-Algorithmus zur Aufdeckung ganzzahliger Relationen im-

[3] Diese Algorithmen finden sich unter den *Top 10*, die Jack Dongarra und Francis Sullivan [DS00] zusammengestellt haben. In ihre Hitliste wurden Algorithmen aufgenommen, welche nach ihrer Ansicht „den stärksten Einfluss auf die Entwicklung und Praxis von Wissenschaft und Technik des 20. Jahrhunderts“ hatten.

plementierte. In diesem Fall wurde eine Präzision von etwa 200 Dezimalziffern verwendet. Darüberhinaus benötigte die Rechnung einen Eingabevektor von mehr als 25 mathematischen Konstanten, jede auf 200 Ziffern genau gegeben. Der mathematische Stellenwert dieser speziellen Formel liegt darin, dass sie die direkte Berechnung von binären oder hexadezimalen Ziffern von π von jeder beliebigen Stelle an gestattet. Der Algorithmus ist dabei sehr einfach, kommt fast ohne jeden Speicher aus und benötigt keine Langzahlarithmetik [BBP97, AW97, BB04, BBG04]. Seit 1996 wurden zahlreiche weitere Formeln dieses Typs gefunden, so auch etliche Formeln für Größen aus der Quantenfeldtheorie [Bai00].

Man sollte betonen, dass eine große Auswahl von Algorithmen der numerischen Mathematik in der experimentellen Mathematik zum Einsatz kommt. Nicht wenige dieser Algorithmen sind in diesem Buch beschrieben. Besonders wichtig sind die hochgenaue numerische Quadratur (d.h. die hochgenaue numerische Auswertung bestimmter Integrale) und die hochgenaue Auswertung von Grenzwerten und unendlichen Reihen. Diese Algorithmen benötigen natürlich Langzahlarithmetik, verlangen aber oft auch nach mathematischer Raffinesse und erheblicher Kunstfertigkeit im Umgang mit Formeln.

Kurzum, die meisten Techniken dieses Buchs, wenn nicht sogar alle, besitzen Anwendungen weit jenseits der klassischen Gebiete der angewandten Mathematik, auf die sich die numerische Mathematik seit langem hauptsächlich stützte. Es ist von großem Wert, diese Techniken zu erlernen, und es macht in vielen Fällen sogar Spaß, mit ihnen zu arbeiten. Jeder Bissen dieses zehngängigen Festmahls ist ein Hochgenuß.

David H. Bailey
Chief Technologist
Computational Research Department
Lawrence Berkeley National Laboratory, USA