$$(83)\left\{\begin{aligned}&(-1)^m a^{2m}\left[\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\right]\\&=b^{2m}\left[\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\pi^{2m+1}\mathcal{E}\frac{1}{(e^{az}-e^{-az})\sin bz}\frac{1}{((z^{2m+1}))},\end{aligned}\right.$$

$$(84)\left\{\begin{aligned}&(-1)^{m+1} a^{2m}\left[\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2a}}}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{5\pi b}{2a}}+e^{-\frac{5\pi b}{2a}}}-\ldots\right]\\&=b^{2m}\left[\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}+e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}+e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2m+1}}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}+e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\ldots\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}\mathcal{E}\frac{1}{(e^{az}+e^{-az})\cos bz}\frac{1}{((z^{2m+1}))}.\end{aligned}\right.$$

Il est bon d'observer que les équations (79), (80) deviennent inexactes dans le cas où l'on suppose $m=0$, et doivent alors être remplacées par la formule (66) et la suivante :

$$(85)\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{2}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{3}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\right)\\&=\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{2}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{3}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots\right)-\frac{1}{4\pi ab}.\end{aligned}\right.$$

Lorsque, dans les formules (82), (83), (84), on pose successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, ..., on en tire : 1° la formule (66); 2° celles qui suivent :

$$(86)\left\{\begin{aligned}&\frac{\pi}{24}\frac{b}{a}+\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\\&=\frac{\pi}{24}\frac{a}{b}+\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots.\end{aligned}\right.$$

$$(87)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2a}}}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{e^{\frac{5\pi b}{2a}}+e^{-\frac{5\pi b}{2a}}}-\ldots\\
&=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}+e^{-\frac{\pi a}{2b}}}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}+e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}-\frac{1}{5}\,\frac{1}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}+e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}+\ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$(88)\quad\left\{\begin{aligned}
&a\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}+e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}+e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{1}{9}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}+e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\right)\\
&=4b\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}-e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{1}{9}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}-e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{1}{25}\,\frac{1}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}-e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\ldots\right)\\
&\quad+\frac{\pi^2}{24}\,\frac{a^2-3b^2}{a},
\end{aligned}\right.$$

$$(89)\quad\left\{\begin{aligned}
&-a^2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}}-\frac{1}{8}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi b}{a}}-e^{-\frac{2\pi b}{a}}}+\frac{1}{27}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{a}}-e^{-\frac{3\pi b}{a}}}-\ldots\right)\\
&=b^2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{b}}-e^{-\frac{\pi a}{b}}}-\frac{1}{8}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi a}{b}}-e^{-\frac{2\pi a}{b}}}+\frac{1}{27}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{b}}-e^{-\frac{3\pi a}{b}}}-\ldots\right)\\
&\quad-\frac{\pi^3}{1440}\,\frac{7(a^4+b^4)-10a^2b^2}{ab},
\end{aligned}\right.$$

$$(90)\quad\left\{\begin{aligned}
&a^2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi b}{2a}}+e^{-\frac{\pi b}{2a}}}-\frac{1}{27}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi b}{2a}}+e^{-\frac{3\pi b}{2a}}}+\frac{1}{125}\,\frac{1}{e^{\frac{5\pi b}{2a}}+e^{-\frac{5\pi b}{2a}}}-\ldots\right)\\
&=b^2\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi a}{2b}}+e^{-\frac{\pi a}{2b}}}-\frac{1}{27}\,\frac{1}{e^{\frac{3\pi a}{2b}}+e^{-\frac{3\pi a}{2b}}}+\frac{1}{125}\,\frac{1}{e^{\frac{5\pi a}{2b}}+e^{-\frac{5\pi a}{2b}}}-\ldots\right)\\
&\quad+\frac{\pi^3}{64}(a^2-b^2),
\end{aligned}\right.$$

. . . .

Lorsque, dans ces dernières formules, on pose $b=0$, on retrouve les équations connues

$$(91)\quad\left\{\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12},\\
&1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{7\pi^4}{720},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$