Aufgabe 1
Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen mit C^1-Rand ∂M und es seien $\xi \in \partial M$ und $v \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie eine exakte Definition an von

„v ist äußerer Normalenvektor an ∂M in ξ."

Lösung
v ist genau dann äußerer Normalenvektor an ∂M in ξ, falls v die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $\|v\|_2 = 1$,
2. $v \perp T_\xi(\partial M)$ und
3. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $\xi + tv \notin M$ für alle $0 < t < \varepsilon$.

Aufgabe 2
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Geben Sie eine exakte Definition an von

„A ist Jordan-Nullmenge."

Lösung
A heißt Jordan-Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathcal{W}$ von achsenparallelen Würfeln gibt mit

$$A \subset \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$$

und

$$\sum_{W \in \mathcal{W}} \lambda(W) < \varepsilon.$$

Aufgabe 3
Ist jede beschränkte Funktion Riemann-integrierbar? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Lösung
Nein, so ist etwa auf $(0,1)$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschränkt, aber nicht R-intbar, da $\operatorname{osc}_J(f) = 1$ auf jedem Teilintervall J von $(0,1)$ gilt.

Aufgabe 4

(a) Ist jeder Unterraum M des $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(M) > 0$ eine Mannigfaltigkeit? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(b) Ist jede Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Lösung
(a) Ja. Sei M ein solcher Unterraum und $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis von M mit $0 < k = \dim(M) \le 3$. Die C^∞-Abbildung ϕ: $\mathbb{R}^k \to M$ mit

$$\phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) := \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k$$

ist linear, bijektiv und die (lineare) Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig. Da die b_i linear unabhängig sind, hat auch J_ϕ stets vollen Rang. Damit ist ϕ eine Karte und $\{\phi\}$ ein Atlas von M.

(b) Nein. Betrachtet man etwa $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, so ist S^2 eine Mannigfaltigkeit, aber kein Unterraum, da $0 \notin S^2$.

Aufgabe 5
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Ecken $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$ und $(2,1)$.
Berechnen Sie

$$\int_\Omega xy \, d(x,y).$$

Lösung
$(x,y) \mapsto xy$ ist stetig und Ω ist J-messbar; somit ist f R-intbar. Mit dem Satz 2.25 (Fubini) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_\Omega xy \, d(x,y) &= \int_{y=0}^1 \Big(\int_{x=y}^{3-y} yx \, dx \Big) \, dy = \int_{y=0}^1 y \Big(\int_{x=y}^{3-y} x \, dx \Big) \, dy \\
&= \int_{y=0}^1 y \Big[\frac{1}{2} x^2 \Big]_{x=y}^{x=3-y} dy = \frac{1}{2} \int_{y=0}^1 y(9-6y) \, dy \\
&= \frac{1}{2} \Big[\frac{9}{2} y^2 - 2y^3 \Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie $\mathrm{vol}_3(\Omega)$ für

$$\Omega := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{y+z}{2}\Big)^2 + (z+x)^2 \le 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Lösung
Betrachtet man die Transformation

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ (y+z)/2 \\ z+x \end{pmatrix}$$

mit

$$J_T(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det(J_T(x,y,z)) = \frac{1}{2}.$$

Dann gilt $\Omega = T^{-1}(K)$, wobei $K := K(0,1) = \{ a^2 + b^2 + c^2 \le 1 \}$, und T ist ein C^1-Diffeomorphismus (auf den entsprechenden offenen Mengen). Mit Satz 2.31 (Substitutionsregel) gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(\Omega) &= \int_{T^{-1}(K)} 1 \, d(x,y,z) = \int_K |\det J_{T^{-1}}(a,b,c)| \, d(a,b,c) \\
&= 2 \int_K d(a,b,c) = 2 \, \mathrm{vol}_3(K) = \frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Ferner seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie: Es gilt

$$\int_\Omega (g\partial_i f)(x)\,dx = -\int_\Omega (f\partial_i g)(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} (gf\nu_i)(\xi)\,dS(\xi)$$

für alle $1 \leq i \leq n$. (Dabei bezeichnet $\nu(\xi)$ die äußere Normale an $\partial\Omega$ in $\xi \in \partial\Omega$.)

Lösung
Setzt man $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto F(x) := (0, \ldots, 0, \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{i\text{-te Komp.}}, 0, \ldots, 0)^T,$$

so ist F ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Wegen $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ist Satz 4.7 (Gaußscher Integralsatz) anwendbar und es gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle \; dS(\xi).$$

Wegen

$$\operatorname{div} F(x) = \partial_i f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_i g(x) \qquad \text{und}$$
$$\langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle = \nu_i(\xi) f(\xi) g(\xi)$$

ergibt sich

$$\int_\Omega (g\partial_i f)(x)\,dx = -\int_\Omega (f\partial_i g)(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} (gf\nu_i)(\xi)\,dS(\xi)$$

und damit die Behauptung.

Aufgabe 8
Für $(x, y)^T \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ sind das Vektorfeld

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x) - 2xy \\ \cos(e^y) \end{pmatrix}$$

und die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to S^1$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ gegeben. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(z) \cdot dz.$$

Lösung
Offenbar ist γ eine geschlossene Kurve und $\gamma|_{[0,2\pi)} \to S^1$ ist bijektiv. γ berandet $\Omega = B(0, 1)$ und durchläuft $\partial\Omega$ im mathematisch positiven Sinn. F ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig diffbar ($\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$) und Satz 5.1 (Stokes im $\mathbb{R}^2$) liefert:

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z) \cdot dz &= \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x, y)\,d(x, y) = \int_{y=-1}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2x\,dx\,dy \\ &= \int_{y=-1}^{1} 0\,dy = 0\end{aligned}$$