Aufgabe 1
Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$, sei $a \in M$ und $v \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie eine exakte Definition an von „v ist Tangentialvektor an M in a."

Lösung
v ist genau dann Tangentialvektor an M in a, falls es eine C^1-Kurve φ: $I \to \mathbb{R}^3$ gibt (wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist), so dass

1. $\varphi(0) = a$,
2. $\varphi'(0) = v$ und
3. $\varphi(I) \subset M$

gilt.

Aufgabe 2
Im $\mathbb{R}^2$ sei das Vektorfeld $f(x,y) := \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ x+y \end{pmatrix}$ gegeben.
Zeigen Sie:
Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ eine Jordan-Nullmenge, so ist auch $f(A) \subset \mathbb{R}^2$ eine Jordan-Nullmenge.

Lösung
Alternative 1:
Offensichtlich ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und somit lokal Lipschitz-stetig. Da A als J-Nullmenge beschränkt ist, ist $f|_A$ Lipschitz-stetig. Satz 2.15 (Lipschitz-stetiges Bild einer J-Nullmenge) liefert die Behauptung.
Alternative 2:
Offensichtlich ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\sup_{\substack{1\le i,j\le 2 \\ \xi,\eta\in\mathbb{R}}} |\partial_j f_i(\xi,\eta)| \le 1.$$

Mit dem Mittelwertsatz (im Mehrdimensionalen) ist

$$\|f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)\|_\infty \le 2 \sup_{\substack{1\le i,j\le 2 \\ \xi,\eta\in\mathbb{R}}} |\partial_j f_i(\xi,\eta)| \left\| \begin{pmatrix} \tilde{x}-x \\ \tilde{y}-y \end{pmatrix} \right\|_\infty \le 2 \left\| \begin{pmatrix} \tilde{x}-x \\ \tilde{y}-y \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

und f somit Lipschitz-stetig. Satz 2.15 (Lipschitz-stetiges Bild einer J-Nullmenge) liefert die Behauptung.

Aufgabe 3
Ist die Funktion $f(x,y) = \operatorname{sign}(x-y)$ auf $(0,1) \times (0,1)$ Riemann-integrierbar?

Hinweis: $\operatorname{sign}(x) = 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sign}(0) = 0$, $\operatorname{sign}(x) = -1$ für $x < 0$.

Lösung
$(0,1)\times(0,1)$ ist J-messbar. Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f in $(0,1)\times(0,1)$ ist durch

$$M = \{(x,y) \in (0,1)\times(0,1) : x = y\}$$

gegeben. Dies ist eine J-Nullmenge im $\mathbb{R}^2$ (M ist sogar beschränkte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit), also ist f J-fast überall stetig. Ferner ist f beschränkt. Satz 2.21 liefert die Behauptung.

Aufgabe 4
Handelt es sich bei der Menge $M := \{\, X \in \mathbb{R}^{(n,n)} \;:\; X^T = -X \,\} \subset \mathbb{R}^{(n,n)}$ um eine Mannigfaltigkeit? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Lösung
Mit $f(X) := X^T + X$ lässt sich M schreiben als $M = \{\, X \in \mathbb{R}^{(n,n)} \;:\; f(X) = 0 \,\}$. Klarerweise ist f linear, also $M = \operatorname{kern} f$ und M somit ein (Unter-)vektorraum von $\mathbb{R}^{(n,n)}$. Untervektorräume sind Mannigfaltigkeiten (siehe etwa Motivation von Kapitel 1).

Aufgabe 5
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Parallelogramm mit den Ecken $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ und $(3,1)$.
Berechnen Sie

$$\int_\Omega xy \, d(x,y).$$

Lösung
$(x,y) \mapsto xy$ ist stetig und Ω ist J-messbar; somit ist f R-intbar. Mit dem Satz 2.25 (Fubini) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_\Omega xy\, d(x,y) &= \int_{y=0}^{1} \Big(\int_{x=y}^{2+y} yx \, dx \Big)\, dy = \int_{y=0}^{1} y \Big(\int_{x=y}^{2+y} x\, dx \Big)\, dy \\
&= \int_{y=0}^{1} y \Big[\frac{1}{2}x^2 \Big]_{x=y}^{x=2+y} dy = \int_{y=0}^{1} y(2+2y)\, dy \\
&= \int_{y=0}^{1} 2y + 2y^2 \, dy = \Big[y^2 + \frac{2}{3}y^3 \Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie $\operatorname{vol}_3(\Omega)$ für $\Omega := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 \le 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Lösung
Zu $K := K(0,1) = \{\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \,\}$ betrachte die Transformation $T(x,y,z) = (2x,y,z)$ mit $\det J_T(x,y,z) = 2$. Dann gilt $\Omega = T(K)$ und T ist ein C^1-Diffeomorphismus (auf den entsprechenden offenen Mengen). Mit Satz 2.31 (Substitutionsregel) gilt

$$\operatorname{vol}_3(\Omega) = \int_{T(K)} 1 \, d(x,y,z) = \int_K 2\, d(x,y,z) = 2 \operatorname{vol}_3(K) = \frac{8}{3}\pi.$$

Aufgabe 7
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit C^1-Rand. Ω habe das zweidimensionale Volumen 1. Sei

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x - 4y^2 \\ 2y + \sin x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \; dS(\xi).$$

Lösung
$F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $(\operatorname{div} F)(x,y) = 3 + 2 = 5$. Mit dem Satz 4.7 (Gaußscher Integralsatz) gilt

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \; dS(\xi) = \int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x,y) \, d(x,y) = 5 \operatorname{vol}(\Omega) = 5.$$

Aufgabe 8
Im $\mathbb{R}^2$ seien die Sphäre $S := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = r^2 \}$ mit $r > 0$ und das Vektorfeld

$$F(x,y) := \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|_2^2}$$

gegeben. Berechnen Sie

$$\int_S \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \; dS(\xi).$$

$\nu(\xi)$ ist die äußere Normale von $B_r(0)$ bei $\xi \in S$.

Lösung
Der Gaußsche Integralsatz ist hier **nicht** anwendbar.

$$\begin{aligned} \int_S \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \; dS(\xi) &= \int_S \left\langle \frac{\xi}{\|\xi\|_2^2}, \frac{\xi}{r} \right\rangle dS(\xi) \\ &= \frac{1}{r} \int_S 1 \, dS(\xi) = \frac{1}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi, \end{aligned}$$

da $2\pi r$ die Oberfläche von S ist.