Prof. Dr. O. Junge, P. Koltai, K. Tichmann
Zentrum Mathematik - M3
Technische Universität München

Einführung in die Numerik - Übungsblatt 5

Sommersemester 2010

Tutorübungen

T12 (Fixpunktiteration)

Zuerst einige allgemeine Überlegungen zur Fixpunktiteration:

(a) Es sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x) = ax + b$ mit $a \neq 1$ gegeben. Wir wollen den (eindeutigen) Fixpunkt x_* mit $\phi(x_*) = x_*$ mittels Fixpunktiteration berechnen, d.h. $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Geben Sie den Fehler $|x_k - x_*|$ in Abhängigkeit von x_0, a und b an. Wann konvergiert die Iteration?

Hinweis: $\phi(x) = a(x - x_*) + x_*$

(b) Nehmen wir an, die Folge $\{y_k\}$ konvergiert linear gegen y_*, d.h. $|y_{k+1} - y_*| = C|y_k - y_*|$, dabei ist C die Konvergenzrate. Stellen Sie den Fehler $e_k = |y_k - y_*|$ graphisch in Abhängigkeit von k (halblogarithmisch) dar. Aus welcher Kenngröße des Graphen können wir die Konvergenzrate C ablesen?

Hinweis: `semilogy` *in Matlab*

Um die Nullstelle x_* der Funktion $f(x) = 2x - \tan(x)$ in $[1, 1.3]$ zu berechnen, verwenden wir die Iteration $x_{k+1} = \operatorname{atan}(2x_k)$.

(c) Starten Sie die Iteration bei $x_0 = 1$ und berechnen Sie die Nullstelle bis auf Maschinengenauigkeit. Wie lautet ein sinnvolles Abbruchkriterium?

(d) Leiten Sie aus der Iterationsvorschrift eine Schätzung für die Konvergenzrate ab. Plotten Sie den Fehler der $k-$ten Iterierten zum Fixpunkt x_* bei geeigneter Achseneinteilung. Lesen Sie aus diesem Plot die Konvergenzrate ab und vergleichen Sie mit Ihrer Schätzung.

(e) Begründen Sie, warum die Iteration $x_{k+1} = (\tan x_k)/2$ nicht konvergiert.

T12+ (Zusatzaufgabe für Interessenten)

Zeigen Sie mittels Taylor-Entwicklung, dass

$$\phi^n(x_0) - x_* = \sigma^n(x_0 - x_*) + \sigma^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^k \, \mathcal{O}\left(|x_0 - x_*|^2\right)$$

gilt, wobei $\sigma := \phi'(x_*)$ ist. Damit ist die Konvergenzrate der Fixpunktiteration in erster Ordnung durch die Linearisierung bestimmt.

Hausaufgaben (Abgabe 7.7.2010)

H15 (Bisektionsverfahren)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
function [x,n]=bisection (f,a,b,TOL)
```

welche ein Funktionshandle `f`, ein Intervall `[a, b]` und eine gewünschte Genauigkeit `TOL` als Eingabe erhält. Diese Funktion soll dann mittels Bisektion eine Nullstelle von `f` im angegebenen Intervall bis auf die gewünschte Genauigkeit berechnen. Als Rückgabe soll die Approximation `x` der Nullstelle und die Anzahl der benötigten Bisektionsschritte `n` zurückgegeben werden. Testen Sie Ihr Programm an einem selbstgewählten, nichttrivialen Beispiel und dokumentieren Sie das Konvergenzverhalten.

H16 (Weisheit[1])

Man investiere jährlich 1 Geldeinheit, und der jährliche Zinssatz sei $p \geq 0$. Am Ende des n-ten Jahres hat man

$$G = \sum_{k=1}^{n} (1+p)^k = \frac{1+p}{p} \left((1+p)^n - 1\right)$$

Geldeinheiten. Nun möchte man für gegebenes n und G die unbekannte Zinsrate p berechnen. Man verwende dazu das Newton-Verfahren auf die Funktion

$$f(p) = \frac{1+p}{p} \left((1+p)^n - 1\right) - G.$$

(a) Programmieren Sie das Newton-Verfahren und lösen Sie damit das Problem für $n = 10$ und $G = 60$ bzw. $G = 11$.

(b) Woran liegt es, dass das Ergebnis für $G = 11$ falsch ist?

(c) Lösen Sie das Problem aus (b).

H17 (Iterative Berechnung der Division)

Gegeben sei $a > 0$. Finden Sie eine nichtlineare Gleichung $f(x_*) = 0$ mit der eindeutigen Lösung $x_* = 1/a$, für welche die zugehörige Newton-Iteration nur aus Additionen und Multiplikationen besteht.
Ermitteln Sie, für welche Startwerte x_0 die Iteration konvergiert.

[1] Siehe Nr. 17 auf http://www.comlab.ox.ac.uk/nick.trefethen/maxims.html