....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Obige Angaben sind richtig:

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

MODULPRÜFUNG MODUL MA 1302
Einführung in die Numerik

16. Oktober 2009, 09:00 - 10:00 Uhr

Prüfer: Prof. Dr. O. Junge

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

	I	II
1		
2		
3		
4		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

(15 min.) **Aufgabe 1** (Interpolation)

Es sei die *gerade* Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und die paarweise verschiedenen, *symmetrischen* Stützstellen $x_0 < \ldots < x_{2n+1}$, d.h. $x_k = -x_{2n+1-k}$, gegeben. Weiter bezeichne $p_{2n+1} \in \mathbb{P}_{2n+1}$ das Interpolationspolynom, welches f in den gegebenen Stützstellen interpoliert. Zeigen Sie, dass p_{2n+1} von der Form

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, x^{2k}$$

ist.

Hinweis: Eindeutigkeit der Polynominterpolation

Lösung 1.
Es sei $p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} c_k x^k$. Das Interpolationspolynom erfüllt

$$p_{2n+1}(x_i) = f(x_i) = f(-x_i) = f(x_{2n+1-i}) = p_{2n+1}(x_{2n+1-i}),$$

für alle $i = 0 : 2n+1$. Damit gilt

$$\sum_{k=0}^{2n+1} c_k x_i^k = \sum_{k=0}^{2n+1} c_k (-x_i)^k,$$

woraus

$$\sum_{k=0}^{n} c_{2k+1} x_i^{2k+1} = 0 \qquad \forall i = 0 : n$$

folgt. Die Vandermonde-Matrix V mit $V_{ij} = x_{i-1}^{2j-1}$ ist regulär, es folgt also $c_{2k+1} = 0$ für alle $k = 0 : n$.

Lösung 2.
Betrachten wir die Funktion gegeben durch $g(x) := f(x) - f(-x)$. Dies ist die Nullfunktion, damit $g(x_i) = 0$ für alle $i = 0 : 2n+1$.
Da $p_{2n+1}(x_i) = p_{2n+1}(-x_i)$ (symmetrische Stützstellen), wird g durch $q_{2n+1}(x) := p_{2n+1}(x) - p_{2n+1}(-x)$ auf den gegebenen Stützstellen interpoliert.
Aus der Eindeutigkeit der Interpolation folgt $q_{2n+1} \equiv 0$. Daraus folgt, wie oben, dass $c_{2k+1} = 0$, $k = 0 : n$.

Lösung 3.
Interpoliere $g : [-1,0] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ auf den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n < 0$ mit den Basisfunktionen $x^0, x^2, \ldots, x^{2n}$, um das Polynom q_n zu erhalten.
Dimensionsvergleich liefert die Eindeutigkeit.
Da f und q_n gerade Funktionen sind, gilt $q_n(x_k) = f_k$ für alle $k = 0 : 2n+1$.
Also q_n interpoliert f auf ganz $[-1,1]$.
Eindeutigkeit der Polynominterpolation liefert $p_{2n+1} = q_n$, damit die Behauptung.

Lösung 4.
Bezeichne L_i die Lagrange-Funktionen, d.h. $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ (Kronecker-Delta). Wegen der Symmetrie der Stützstellen gilt

$$L_i(-x_j) = \delta_{i,2n+1-j} = \delta_{2n+1-i,j} = L_{2n+1-i}(x_j).$$

Also $L_i(-x)$ interpoliert $L_{2n+1-i}(x)$ in den Stützstellen, weiter sind beide Polynome vom maximalen Grad $2n+1$, somit wegen der Eindeutigkeit identisch. Wenn wir das ausnutzen, folgt mit $f_i = f_{2n+1-i}$:

$$\begin{aligned} p_{2n+1}(x) &= \sum_{i=0}^{2n+1} L_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_i \left(L_i(x) + L_i(-x) \right). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass für Polynome der Form $q(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} k_i x^i$ gilt $q(x) + q(-x) = \sum_{i=0}^{n} 2k_{2i}x^{2i}$ (die ungeraden Potenzen fallen weg), damit besteht die obige Summe nur aus geraden x-Potenzen, und die Behauptung ist bewiesen.

(15 min.) **Aufgabe 2** (QR-Zerlegung)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $n \geq m$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben, A habe vollen Rang. Dann existiert eine volle QR-Zerlegung von $A^\top$:

$$A^\top = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix},$$

mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix.

(a) Zeigen Sie: $x = Q \begin{bmatrix} R^{-\top} b \\ v \end{bmatrix}$ löst $Ax = b$ für alle $v \in \mathbb{R}^{n-m}$.

(b) Zeigen Sie: Alle Lösungen von $Ax = b$ sind von der Form aus (a).

(c) Finden Sie die Lösung von $Ax = b$ mit der minimalen euklidischen Norm.

(d) Schreiben Sie ein kurzes Matlabprogramm, das die Lösung aus (c) berechnet wenn A und b gegeben sind.

Lösung.

(a) Man rechnet:

$$Ax = \begin{bmatrix} R^\top & 0 \end{bmatrix} \underbrace{Q^\top Q}_{I_{n\times n}} \begin{bmatrix} R^{-\top} b \\ v \end{bmatrix} = R^\top R^{-\top} b + 0\,v = b.$$

(b) *1. Möglichkeit.* Da A vollen Rang hat ist die Dimension des Lösungsraums gerade $n - m$. Daher sind alle Lösungen durch die Charakterisierung in (a) gegeben.
2. Möglichkeit. Falls x eine Lösung ist, haben wir

$$\begin{bmatrix} R^\top 0 \end{bmatrix} \underbrace{Q^\top x}_{=:y} = b.$$

Partitioniert man y geeignet als $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, hat man daraus: $R^\top y_1 = b$ und $y_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ beliebig. Setzt man $y_2 = v$, hat man die Behauptung, da $x = Q^\top y$.

(c) Da Q othogonal ist, ändert sie die euklidische Norm nicht, daher suchen wir $\begin{bmatrix} R^{-\top} b \\ v \end{bmatrix}$ mit der kleinsten 2-Norm. Das wird für $v = 0$ angenommen. Also $x = Q \begin{bmatrix} R^{-\top} b \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Man sieht, dass die letzten $n - m$ Spalten von Q nicht gebraucht werden, also eine reduzierte QR-Zerlegung ausreichend ist.

```
[Q,R]=qr(A',0);
x=Q*(R'\b);
```

Anmerkung: Matlab liefert auch für `A\b` die richtige Lösung.

(10 min.) **Aufgabe 3** (Fixpunktiteration)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = (A+I)x_k - b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix}$, dem Vektor $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und einem beliebigen Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Sie sollen nun zeigen, dass man mit dieser Fixpunktiteration das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösen kann.

(a) Zeigen Sie, dass $A^{-1}b$ ein Fixpunkt dieser Fixpunktiteration ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration für jeden Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert.

Lösung.

(a) Wir rechnen zuerst nach, dass $x = A^{-1}b$ ein Fixpunkt ist. Es gilt

$$\phi(x) = \phi(A^{-1}b) = (A+I)A^{-1}b - b = (I + A^{-1})b - b = b + A^{-1}b - b = x.$$

(b) Die Iterationsfunktion ϕ lautet

$$\phi(x) = (A+I)x - b.$$

Weiter ist

$$D\phi(x) = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist ϕ eine globale Kontraktion mit Lipschitzkonstante

$$L = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|D\phi(x)\|_\infty = 1/2 < 1$$

und deswegen konvergiert die Fixpunktiteration für jeden beliebigen Startwert.

Man kann auch eine andere Norm benützen. Es ist $\|D\phi(x)\|_1 = 0.5 = \|D\phi(x)\|_2$.

(20 min.) **Aufgabe 4** (Verschiedene kurze Aufgaben)

In den folgenden Aufgaben bekommen Sie nur Punkte für eine kurze und richtige Begründung.

(a) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) := Ax + b$ gegeben, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtsingulär ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie an, wie viele Iterationen das Newton-Verfahren braucht, um gegen die Nullstelle von f zu konvergieren.

Nur einen Schritt:

$$x_1 = x_0 - A^{-1}(Ax_0 + b) = -A^{-1}b.$$

(b) Existieren zwei Maschinenzahlen u, v (z.B. doppelter Genauigkeit ("double")) mit $u \neq 0$ so, dass $u \oslash v = 0$? Dabei sei $\oslash$ die Maschinendivision. Falls ja, so geben Sie ein Beispiel an.

Ja, z.B. `realmin`$/2^{54}$. Es muss allg. nur gelten, dass u/v so klein ist, dass $\mathrm{fl}(u/v) = 0$ gilt.

(c) Gilt $\sin(x)/x = \mathcal{O}(1)$ für $x \to 0$?

Ja, da $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ für $x \to 0$.

(d) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. A habe vollen Spaltenrang. Ist das Residuum $r = Ax - b$ des linearen Ausgleichproblems $\|Ax - b\|_2 = \min!$ orthogonal auf den Spalten von A?

Umformen der Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b$$

liefert

$$A^T(Ax - b) = 0.$$