NCS

Notiztitel 28.06.2007

5. Optimale Regelung II: Methoden aus der Graphentheorie

5.1. Problemstellung

Kontrollsystem $\quad x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad k = 0,1,2,\dots$

$x_k \in X \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, $u_k \in U \in \mathbb{R}^m$ kompakt, $0 \in U$

$f: X \times U \to X$ stetig

Ziel: stabilisiere das System, d.h. wir nehmen an, dass $f(0,0) = 0$, instabil, und wir suchen eine Folge $\bar{u} = (u_0, u_1, \dots)$ von Kontrollwerten, so dass für die zugehörige Trajektorie

$$x_k(x_0, \bar{u}), \quad k = 0,1,2,\dots$$

mit $x_{k+1}(x_0, \bar{u}) = f(x_k(x_0, \bar{u}), u_k)$ gilt

$$x_k(x_0, \bar{u}) \to 0$$

für $k \to \infty$. – und zwar für eine möglichst große Menge von Anfangszuständen x_0.

Für $x \in X$ sei

$$\mathcal{U}(x) = \{ \bar{u} \in U^{\mathbb{N}} : x_k(x, \bar{u}) \to 0 \text{ für } k \to \infty \}$$

und

$$S = \{ x \in X : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset \}$$ stabilisierbare Menge

zusätzlich gegeben: Kostenfunktion

$$g : X \times U \to [0,\infty)$$

stetig, $g(x,u) = 0 \iff x = 0$.

Akkumulierten Kosten

$$J(x,\bar{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k(x,\bar{u}), u_k) \in [0,\infty]$$

Optimale Wertefunktion $V : X \to [0,\infty]$

$$V(x) = \inf_{\bar{u} \in \mathcal{U}(x)} J(x,\bar{u}) \qquad (\inf \emptyset = \infty)$$

Alternative Formulierung:

Graph: $G = (X,E)$, $E = \{(x,y) \mid y = f(x,u) \text{ f. ein } u \in U\}$

Kantengewichte: $w(e) = w((x,y)) := \inf_{y = f(x,u)} g(x,u)$

Pfade in G: $p = (e_0, e_1, \dots)$, $e_i \in E$,
wobei $e_i = (x_i^a, x_i^e)$ und $x_i^e = x_{i+1}^a \ \forall i$

Länge eines Pfades

$$w(p) = \sum_{k=0}^{\infty} w(e_k) \in [0,\infty]$$

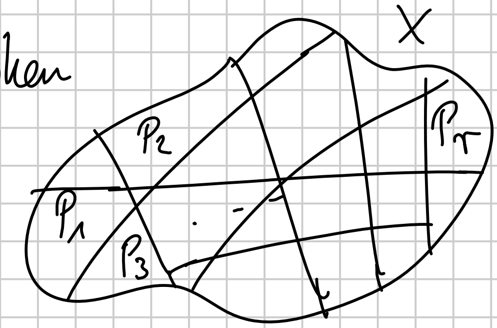
$$V(x) = \inf \{ w(p) \mid p \text{ verbindet } x \text{ mit } 0 \}$$

5.2 Diskretisierung des Problem

Partition $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r\}$ von X, d.h. $\bigcup_{i=1}^{r} P_i = X$ und

$m(P_i \cap P_j) = 0$ für $i \neq j$, P_i abgeschlossen

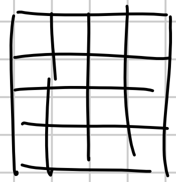
Wir definieren folgenden endlichen Graphen

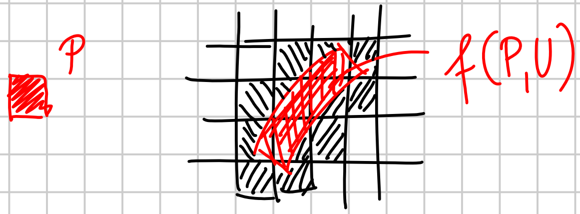


$$G_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, E_{\mathcal{P}}) \text{ mit}$$

$$E_{\mathcal{P}} = \{ (P, P') \mid f(P, U) \cap P' \neq \emptyset \}$$

bzw.





mit Gewichtung, $e = (P, P')$

$$w(e) = \min \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in P', \, x \in P, \, u \in U \}$$

zu jedem $x \in X$ gibt es ein $P =: \mathcal{P}(x)$ mit $x \in P$.
Die Länge eines Pfades $p = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ in $G_{\mathcal{P}}$ ist

$$w(p) = \sum_{k=0}^{n-1} w(e_k),$$

Approximative optimale Wertefunktion

$$V_{\mathcal{P}}(x) = \min \{ w(p) \mid p \text{ verbindet } \mathcal{P}(x) \text{ mit } \mathcal{P}(0) \}$$

$\rightarrow$ berechenbar! z.B. Dijkstra-Algorithmus

Fragen: – was hat $V_{\mathcal{P}}$ mit V zu tun?
– konvergiert $V_{\mathcal{P}} \to V$, falls $\operatorname{diam}(\mathcal{P}) \to 0$?

Proposition 5.1: $V_{\mathcal{P}}(x) \leq V(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Offensichtlich für $x \in X$ mit $V(x) = \infty$. Wir betrachten also $x \in X$ mit $V(x) < \infty$. Wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Pfad p in $G_{\mathcal{P}}$

gibt, der x mit 0 verbindet, so dass

$$w(p) \leq J(x, \bar{u})$$

wobei $\bar{u} \in \mathcal{U}(x)$ mit $J(x, \bar{u}) < V(x) + \varepsilon$. Wir definieren p, indem wir der Trajektorie $x_k(x, \bar{u})$ folgen:

$$p = (e_0, \dots, e_{n-1}), \quad e_k = (\mathcal{P}(x_k), \mathcal{P}(x_{k+1})), \quad k = 0, \dots, n-1$$

Die Länge dieses Pfades ist

$$\begin{aligned} w(p) &= \sum_{k=0}^{n-1} w(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \min_{\substack{x \in \mathcal{P}(x_k) \\ u \in U}} \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in \mathcal{P}(x_{k+1}) \} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k, u_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k, u_k) \\ &= J(x, \bar{u}) \end{aligned}$$

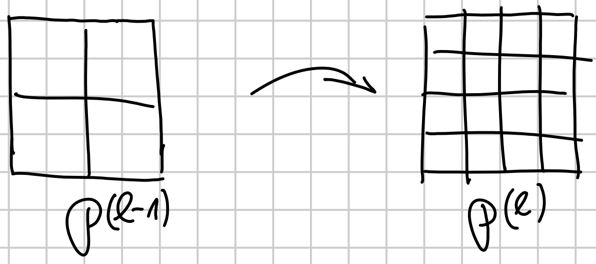
Da ε beliebig war, folgt

$$V_{\mathcal{P}}(x) \leq V(x).$$

∎

Zur Konvergenz:

Wir betrachten jetzt eine Folge $(\mathcal{P}^{(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von geschachtelten Partitionen, d.h. $P \in \mathcal{P}^{(\ell)} \Rightarrow P \subset P' \in \mathcal{P}^{(\ell-1)}$,



mit $\operatorname{diam}_{\ell \to \infty}(\mathcal{P}^{(\ell)}) \to 0$ $\left[\operatorname{diam}(\mathcal{P}) = \max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{diam} P\right]$.

Proposition 5.2: Für $x \in S$ ist die Folge

$$\left(V_{\mathcal{P}^{(\ell)}}(x)\right)_{\ell \in \mathbb{N}}$$

monoton wachsend.

Beweis: Es gilt $V_{\mathcal{P}^{(\ell)}}(x) = w(p^{(\ell)})$, wobei $p^{(\ell)}$ ein Pfad kürzester Länge in $G_{\mathcal{P}^{(\ell)}}$ ist, der x mit 0 verbindet. Widerspruchsannahme: angenommen, es gäbe einen minimierenden Pfad $p^{(\ell)}$ in $G_{\mathcal{P}^{(\ell)}}$ und einen minimierenden Pfad $p^{(\ell+1)}$ in $G_{\mathcal{P}^{(\ell+1)}}$ mit $w(p^{(\ell+1)}) < w(p^{(\ell)})$. Dann können wir einen Pfad $\tilde{p}^{(\ell)}$ in $G_{\mathcal{P}^{(\ell)}}$ konstruieren, so dass $w(\tilde{p}^{(\ell)}) < w(p^{(\ell)})$ – dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von $p^{(\ell)}$:

Sei $$p^{(\ell+1)} = \left(e_0^{(\ell+1)}, \dots, e_{n(\ell+1)}^{(\ell+1)}\right) \quad \text{mit } e_j^{(\ell+1)} = \left(P_j^{(\ell+1)}, P_{j+1}^{(\ell+1)}\right)$$

mit $f(P_j^{(\ell+1)}, U) \cap P_{j+1}^{(\ell+1)} \neq \emptyset$. Da die Partitionen geschachtelt sind, existieren $\tilde{P}_j^{(\ell)}, \tilde{P}_{j+1}^{(\ell)} \in \mathcal{P}^{(\ell)}$ mit

$$P_j^{(\ell+1)} \subset \tilde{P}_j^{(\ell)} \quad \text{und} \quad P_{j+1}^{(\ell+1)} \subset \tilde{P}_{j+1}^{(\ell)}$$

und es gilt $$f(\tilde{P}_j^{(\ell)}, U) \cap \tilde{P}_{j+1}^{(\ell)} \neq \emptyset$$

und daher $\tilde{e}_j^{(\ell)} = (\tilde{P}_j^{(\ell)}, \tilde{P}_{j+1}^{(\ell)}) \in E_{\mathcal{P}^{(\ell)}}$. Diese Konstruktion ist für alle j möglich und wir erhalten den Pfad

$$\tilde{p}^{(\ell)} = \left(\tilde{e}_0^{(\ell)}, \tilde{e}_1^{(\ell)}, \dots, \tilde{e}_{n(\ell+1)}^{(\ell)}\right)$$

mit $$w(\tilde{e}_j^{(\ell)}) = \min\left\{ g(x,u) \mid f(x,u) \in \tilde{P}_{j+1}^{(\ell)}, x \in \tilde{P}_j^{(\ell)}, u \in U \right\}$$
$$\leq \min\left\{ g(x,u) \mid f(x,u) \in \underset{\cup}{P_{j+1}^{(\ell+1)}}, x \in \underset{\cup}{P_j^{(\ell+1)}}, u \in U \right\}$$

$$= w(e_j^{(\ell+1)})$$

und damit $w(\tilde{p}^{(\ell)}) \leq w(p^{(\ell+1)}) < w(p^{(\ell)})$. $\lightning$ $\blacksquare$

<u>Satz 5.3:</u> Für $x \in S$ gilt $V_{P^{(\ell)}}(x) \to V(x)$ für $\ell \to \infty$.

<u>Beweis:</u> Widerspruchsannahme:

$$\lim_{\ell \to \infty} V_{P^{(\ell)}}(x) = \overline{V}(x) < V(x).$$

für ein $x \in S$.
Wir konstruieren nun eine Trajektorie $x_k(x, \overline{u})$ mit

$$J(x, \overline{u}) \leq \overline{V}(x)$$

und dies steht im Widerspruch zur Definition von V und zeigt, dass unsere Annahme falsch ist.
Dazu verwenden wir Pfade mit unendlich vielen Kanten. jeden gegebenen Pfad $p^{(\ell)} = (e_0^{(\ell)}, \dots, e_{n(\ell)}^{(\ell)})$ können wir formal erweitern auf einen Pfad

$$p^{(\ell)} = (e_0^{(\ell)}, \dots, e_{n(\ell)}^{(\ell)}, o^{(\ell)}, o^{(\ell)}, \dots)$$

wobei $o^{(\ell)} = (P^{(\ell)}(0), P^{(\ell)}(0))$ mit $w(o^{(\ell)}) = 0$ (diese Kante existiert, da $f(0,0) = 0$ und $g(0,u) = 0$)

Wir betrachten eine Folge $(p^{(\ell)})_\ell$ von minimierenden Pfaden, $e_j^{(\ell)} = (P_j^{(\ell)}, P_{j+1}^{(\ell)})$. Es gilt per Definition, dass $x \in P_0^{(\ell)}$ für alle ℓ. Wir setzen $x_0^{(\ell)} = x = x_0$. Wähle $\tilde{x}_0^{(\ell)} \in P_0^{(\ell)}$ und einen Kontrollwert $u_0^{(\ell)} \in U$ mit

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}_0^{(\ell)}, u_0^{(\ell)}) &= \min \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in P_1^{(\ell)}, x \in P_0^{(\ell)}, u \in U \} \\ &= w(e_0^{(\ell)}) \end{aligned}$$

Setze $x_1^{(\ell)} = f(\tilde{x}_0^{(\ell)}, u_0^{(\ell)})$. Da X kompakt ist, hat $(x_1^{(\ell)})_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(\ell)})_{\ell\in\hat{L}_0}$ für $\hat{L}_0 \subset \mathbb{N}$. Ihr Grenzwert sei $x_1 \in X$. Behauptung: $\exists u_0 \in U$, so dass $x_1 = f(x_0, u_0)$. Es gilt zunächst, da $\operatorname{diam}(P^{(\ell)}) \to 0$, dass $\tilde{x}_0^{(\ell)} \to x_0$. Da U kompakt ist, können wir eine konvergente Teilfolge $(u_0^{(\ell)})_{\ell\in L_0}$ von $(u_0^{(\ell)})_{\ell\in\mathbb{N}}$ auswählen mit $L_0 \subset \hat{L}_0$, ihr Grenzwert sei u_0. Wegen der Stetigkeit von f folgt $x_1 = f(x_0, u_0)$. Wir wiederholen diese Konstruktion mit x_1 statt x_0 und erhalten einen Punkt $x_2 \in X$ als Grenzwert einer Folge $(x_2^{(\ell)})_{\ell\in L_1}$, $L_1 \subset L_0$, usw.

„Diagonalargument": wir haben eine Folge $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathbb{N}$ konstruiert mit $L_{k+1} \subset L_k$. Wir wählen $\ell_0 \in L_0$ beliebig, und induktiv $\ell_k \in L_k$, $k = 1, 2, \dots$ so dass $\ell_k > \ell_{k-1}$ und setzen $L = \{\ell_0, \ell_1, \dots\}$. Aufgrund dieser Konstruktion gilt

$$\{\ell_k, \ell_{k+1}, \dots\} \subset L_k .$$

daher gilt

$$\lim_{\ell\in L} \tilde{x}_k^{(\ell)} = \lim_{\ell\in L} x_k^{(\ell)} = x_k \quad \text{und} \quad \lim_{\ell\in L} u_k^{(\ell)} = u_k$$

Aufgrund der Stetigkeit von g gilt nun

$$g(x_k, u_k) = \lim_{\ell\in L} g(\tilde{x}_k^{(\ell)}, u_k^{(\ell)}) = \lim_{\ell\in L} w(e_k^{(\ell)})$$

Wir erhalten also als akkumulierte Kosten

$$J(x, \bar{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k, u_k) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} g(x_k, u_k)$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \lim_{\ell\in L} g\left(\bar{x}_k^{(\ell)}, u_k^{(\ell)}\right)$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \lim_{\ell\in L} w\left(e_k^{(\ell)}\right)$$

$$= \lim_{K\to\infty} \lim_{\ell\in L} \sum_{k=0}^{K} w\left(e_k^{(\ell)}\right)$$

$$\leq \lim_{K\to\infty} \lim_{\ell\in L} \sum_{k=0}^{n(\ell)} w\left(e_k^{(\ell)}\right)$$

$$= \lim_{\ell\in L} \sum_{k=0}^{n(\ell)} w\left(e_k^{(\ell)}\right)$$

$$= \lim_{\ell\in L} V_{p(\ell)}(x) = \bar{V}(x)$$

Da nach Annahme $\bar{V}(x) < V(x)$, haben wir eine Trajektorie gefunden, für die $J(x, \hat{u}) < V(x)$. ↯