Notiztitel 21.06.2007

Idee: Fixpunktiteration mit dem Bellman-Operator

$$T_h(v)(x) := \sup_{u \in U} \{ \tilde{g}_h(x,u) + \beta v(\tilde{\varphi}_h(x,u)) \}$$

d.h. konstruiere Folge $(v^{(k)})$ mit $v^{(k+1)} = T_h v^{(k)}$ („Werteiteration").

Satz 4.8: Für die Folge $(v^{(k)})$, $v^{(0)} \equiv 0$, $v^{(k+1)} = T v^{(k)}$ gilt

$$\| v^{(k)} - V_h \|_\infty \leq \beta^k \frac{M_g}{\delta} \qquad k = 0,1,2,\dots$$

falls $\delta h < 1$. Insbesondere konvergiert also $(v^{(k)})$ gleichmäßig gegen V_h.

Beweis: Wir betrachten zwei Funktionen $v_1, v_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$|T_h(v_1)(x) - T_h(v_2)(x)| \leq \beta \sup_{u \in U} |v_1(\tilde{\varphi}_h(x,u)) - v_2(\tilde{\varphi}_h(x,u))|$$
$$\leq \beta \| v_1 - v_2 \|_\infty$$

und damit

$$\| T_h(v_1) - T_h(v_2) \|_\infty \leq \beta \| v_1 - v_2 \|_\infty .$$

Also folgt

$$\| v_{k+1} - V_h \| = \| T_h(v_k) - T_h(V_h) \|$$
$$\leq \beta \| v_k - V_h \|$$

und mit $\| V_h - v_0 \| = \| V_h \| \leq \frac{M_g}{\delta}$ (Lemma 4.1)

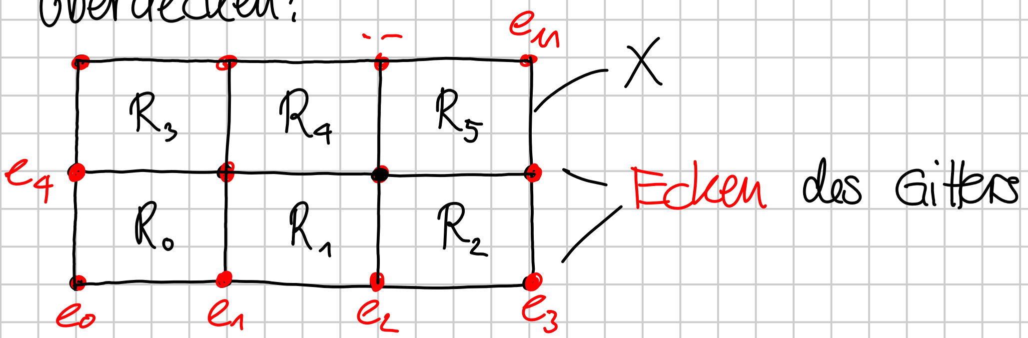
$\rightsquigarrow$ Beh.
Ind. $\blacksquare$

(4.6) Diskretisierung im Ort

Im folgenden: $f: X \times U \to \mathbb{R}^2$, $X \subset \mathbb{R}^2$ stark invariant, d.h.

$$\boxed{f(x, U) \subset X} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Definition 4.9: Sei $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Ein Rechteckgitter Γ auf X ist eine Menge von Rechtecken R_i, $i = 0, \dots, p-1$, $p = p_1 p_2$, mit Kantenlängen $h_1 = (b_1 - a_1)/p_1$, $h_2 = (b_2 - a_2)/p_2$, deren Inneres paarweise disjunkt ist und die X überdecken:



Definition 4.10: Eine Funktion $v: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$, heißt affin-bilinear, falls

$$v(x) = x^T A x + a$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Für ein Rechteckgitter Γ auf X betrachten wir den Raum

$$W = \{ w: X \to \mathbb{R} \mid w \in C^0,\ w|_{R_i} \text{ affin-bilinear}, i = 0, \dots, p-1 \}$$

Bezeichnen $e_i^0, \dots, e_i^3$ die Ecken des Rechtecks R_i, dann ist $w|_{R_i}$ eindeutig durch $w(e_i^0), \dots, w(e_i^3)$ bestimmt:

$$w|_{R_i}(x) = \sum_{j=0}^{3} \mu_j(x) w(e_i^j).$$

Dabei sind die μ_j bilineare Funktionen. Damit sind natürlich die Funktionen in $\mathcal{W}$ eindeutig durch ihre Werte in den Ecken des Gitters Γ festgelegt. Insbesondere gilt $\dim \mathcal{W} = (p_1+1)(p_2+1) = n$.

Werteiteration auf $\mathcal{W}$:

$$w^{(k+1)}(e_i) = T(w^{(k)})(e_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n-1$$
$$= \max_{u \in U} \{ \tilde{g}_h(e_i, u) + \beta w^{(k)}(\tilde{\varphi}_h(e_i, u)) \}$$

<u>Abkürzungen:</u>
- $W^{(k)} = (w^{(k)}(e_0), \dots, w^{(k)}(e_{n-1}))^T \in \mathbb{R}^n$
- $w^{(k)}(\tilde{\varphi}_h(e_i, u)) = B_i(u)^T W^{(k)}$
  ($B_i(u)$ hat maximal vier Einträge $\neq 0$)
- $g_i(u) = \tilde{g}_h(e_i, u)$

Damit lautet die Werteiteration auf $\mathcal{W}$ explizit

$$W_i^{(k+1)} = \max_{u \in U} \{ g_i(u) + B_i(u)^T W^{(k)} \} \quad , \quad i = 0, \dots, n-1$$

Überlegungen zur Implementierung:
- $|U| < \infty \to$ max kann durch Vergleich bestimmt werden
- falls zusätzlich $|U| \cdot n$ nicht zu groß: $g_i(u)$ und $B_i(u)$ einmal und speichern.

<u>(4.7) Fehlerschätzer</u>

<u>Lemma 4.11</u> (aposteriori Fehlerschätzer in $\mathcal{W}$)
Falls $\delta h < 1$ gilt $W^{(k)} \to W$ für $k \to \infty$,

wobei $W \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$W_i = \max_{u \in U} \left\{ g_i(u) + \beta B_i(u) W \right\}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (*)$$

ist. Falls $\| W^{(k+1)} - W^{(k)} \|_\infty \le \varepsilon$, dann gilt

$$\| W^{(k)} - W \|_\infty \le \frac{\varepsilon}{h\delta}.$$

Beweis: Die durch $(*)$ definierte Abbildung auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Kontraktion (für $\delta h < 1$) mit Kontraktionsrate $\beta = 1 - \delta h$, also (Banachscher Fixpunktsatz) existiert ein eindeutiger Fixpunkt W von $(*)$ und die Iteration konvergiert. Außerdem gilt

$$\| W^{(k)} - W \|_\infty \le \| W^{(k)} - W^{(k+1)} \| + \| W^{(k+1)} - W \|_\infty$$

$$\le \varepsilon + \beta \| W^{(k)} - W \|_\infty$$

$$\Rightarrow \| W^{(k)} - W \|_\infty \le \frac{\varepsilon}{1 - \beta} = \frac{\varepsilon}{\delta h}. \qquad \blacksquare$$

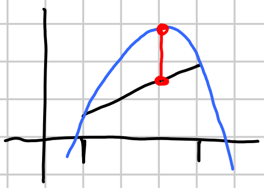
Wie groß ist der Fehler zwischen W und V_h?

Projektion auf $\mathcal{W}$: $v : X \to \mathbb{R}$, $P_{\mathcal{W}} v \in \mathcal{W}$ ist definiert durch

$$P_{\mathcal{W}} v(e_i) = v(e_i), \qquad i = 0, \dots, n-1.$$

Lemma 4.12: (Fehler der Projektion)

Ist $v : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L_v, dann gilt



$$\| v - P_{\mathcal{W}} v \|_\infty \le L_v \operatorname{diam}(\Gamma).$$

$$\left(\operatorname{diam}(\Gamma) = \sup_{i \ne j} \| e_i - e_j \| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right)$$

Beweis: Sei $x \in X$, $x \in R_i$, $e_i^0, \ldots, e_i^3$ die Eckpunkte von R_i. Also $\|x - e_i^j\| \leq \operatorname{diam}(\Gamma)$ für $j = 0{:}3$ und
$|v(x) - v(e_i^j)| \leq L_v \operatorname{diam}(\Gamma)$.
Mit der Darstellung $P_W v(x) = \sum_{j=0}^{3} \mu_j(x) v(e_i^j)$

erhalten wir:

$$|v(x) - P_W v(x)| = \left| \sum_{j=0}^{3} \mu_j(x) v(x) - \sum_{j=0}^{3} \mu_j(x) v(e_i^j) \right|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=0}^{3} \mu_j(x)}_{=1} L_v \operatorname{diam}(\Gamma)$$

$$= L_v \operatorname{diam}(\Gamma)$$

$\blacksquare$

Lemma 4.13: (Lipschitz-Stetigkeit der Iterierten)
Gilt $\delta h < 1$ und $\delta < L$, dann sind die Iterierten $v^{(k)}$ der Werteiteration Lipschitz-stetig mit den Lipschitz-Konstanten $L_0 = 0$ und

$$L^{(k)} = \frac{L_g}{L - \delta} e^{(L-\delta)hk}.$$

ohne Beweis.

Lemma 4.14: (Fehler der ortsdiskretisierten Iterierten)
Es gilt
$$\|v^{(k)} - w^{(k)}\|_\infty \leq 2 M_g e^{\delta h} \int_0^{kh} e^{-\delta t}\, dt$$

und (für $\delta < L$)

$$\|v^{(k)} - w^{(k)}\|_\infty \leq C \frac{\operatorname{diam}(\Gamma)}{h} \int_0^{kh} e^{(L-\delta)t}\, dt$$

Beweis: Es gilt

$$\|v^{(k+1)}\|_\infty = \|\sup_{u\in U}\{hg(x,u)+\beta v^{(k)}(\tilde{\varphi}_h(x,u))\}\|_\infty$$
$$\leq hM_g + \beta\|v^{(k)}\|_\infty$$

und dieselbe Abschätzung gilt auch für $w^{(k+1)}$, mit Induktion folgt also

$$\|v^{(k)}\|_\infty \leq M_g\sum_{i=0}^{k-1} h\beta^i = M_g\sum_{i=0}^{k-1} h\underbrace{(1-\delta h)^i}_{\leq (e^{-\delta h})^i}$$
$$\leq M_g\sum_{i=0}^{k-1} h(e^{-\delta h})^i$$
$$= M_g e^{\delta h}\sum_{i=1}^{k} h(e^{-\delta h})^i$$
$$\leq M_g e^{\delta h}\int_0^{kh} e^{-\delta t}\,dt \quad .$$

Für die andere Abschätzung erhalten wir

$$\|v^{(k+1)}-w^{(k+1)}\|_\infty \leq \|v^{(k+1)}-P_W v^{(k+1)}\|_\infty + \|P_W v^{(k+1)} - P_W w^{(k+1)}\|$$
$$= L_{k+1}\,\mathrm{diam}(\Gamma) + \beta\|v^{(k+1)}-w^{(k+1)}\|$$

induktiv folgt also

$$\|v^{(k)}-w^{(k)}\|_\infty \leq \mathrm{diam}(\Gamma)\sum_{i=1}^{k}\beta^{k-i}L_i$$
$$\leq \mathrm{diam}(\Gamma)\sum_{i=1}^{k} e^{-\delta h(k-i)}L_i$$
$$\leq \mathrm{diam}(\Gamma)\sum_{i=1}^{k} e^{-\delta h(k-i)}\frac{L_g}{L-\delta}e^{(L-\delta)ih}$$
$$\leq \mathrm{diam}(\Gamma)e^{(L-\delta)h}\frac{1}{h}\frac{L_g}{L-\delta}\int_0^{kh} e^{(L-\delta)t}\,dt$$
$$\leq C\,\frac{\mathrm{diam}(\Gamma)}{h}\int_0^{kh} e^{(L-\delta)t}\,dt \qquad \blacksquare$$

Damit kommen wir zur zentralen Fehlerabschätzung:

Satz 4.15: Falls $\delta h < 1$ und $\delta < L$, dann gilt

$$\| w - v \|_\infty \leq K \left(\frac{\operatorname{diam}(\Gamma)}{h} \right)^{\frac{\delta}{L}}.$$

mit $K > 0$.

Beweis: Aus dem Lemma 4.14 erhalten wir

$$\| w - v \|_\infty \leq \int_0^\infty e^{-\delta t} \varphi(t) \, dt$$

mit $\varphi(t) = \min \left\{ e^{\delta h} 2 M_g , C \frac{\operatorname{diam}(\Gamma)}{h} e^{Lt} \right\}$

Analog zum Beweis 4.3 folgern wir

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \varphi(t) \, dt \leq K \left(\frac{\operatorname{diam}(\Gamma)}{h} \right)^\gamma$$

mit $\gamma = \frac{\delta}{L}$.

$\blacksquare$