NCS

Notiztitel 11.07.2007

(ii) Gestörte Systeme – dynamische Spiele

gestörtes Kontrollsystem

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$x_k \in X$ Zustand
$u_k \in U$ Steuerung
$w_k \in W$ Störung
$f: X \times U \times W \to X$ stetig

Ziel: konstruiere Regler $u: X \to U$, so dass die Trajektorie $(x_k)_k$ mit

$$x_{k+1} = f(x_k, u(x_k), w_k)$$

gegen eine Umgebung O des Ursprungs konvergiert für $k \to \infty$ – und zwar für eine beliebige Folge $\bar{w} = (w_k)_k$ von Störungen

Ansatz: wie im Kapitel vorher über ein Optimalitätsprinzip

(ii) Diskretisierung des dynamischen Spiels

Bellman-Operator

$$T(v)(x) = \inf_{u\in U}\Big\{ g(x,u) + \underbrace{\sup_{w\in W} V(f(x,u,w))}_{\substack{= \sup V(f(x,u,W)) \\ = \sup V(\mathcal{N}(x,u))}} \Big\}$$

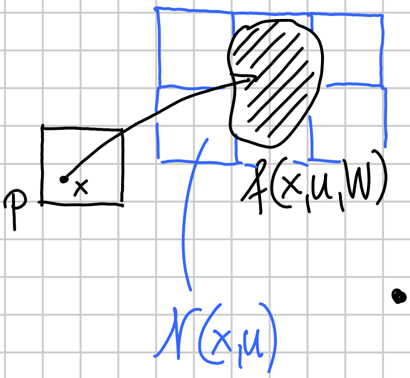
↑ falls V stückweise konstant

Diskretisierter Bellman-Operator

$$\boxed{T_{\mathcal{P}} = \varphi_{\mathcal{P}} \circ T.}$$

Beobachtung:

- für festes $(x,u)\in X\times U$ schneidet die Menge $f(x,u,W)$ endlich viele Partitionselemente, nennen wir sie $\mathcal{N}(x,u)$, d.h.



$$\mathcal{N}(x,u) = \{ P\in\mathcal{P} \mid f(x,u,W)\cap P \neq \emptyset\}$$

- Da $\mathcal{P}$ endlich ist, ist die Anzahl verschiedener Mengen $\mathcal{N}(x,u)$ für $(x,u)\in\mathcal{P}$ endlich

Damit können wir den diskretisierten Bellman-Operator folgendermaßen umschreiben:

$$T_{\mathcal{P}}(v)(x) = \inf_{\mathcal{N}} \inf_{\substack{x'\in p(x),\, u\in U \\ f(x',u,W)=\mathcal{N}}} \Big\{ g(x,u) + \max_{N\in\mathcal{N}} v(N)\Big\}$$

$$\boxed{= \inf_{\mathcal{N}} \Big\{ \mathcal{G}(p(x),\mathcal{N}) + \max_{N\in\mathcal{N}(x',u)} v(N) \Big\}}$$

wobei $\mathcal{G}(p(x),\mathcal{N}(x',u)) = \inf\{ g(x',u) \mid x'\in p(x), u\in U, \mathcal{N}(x',u)=\mathcal{N}\}.$

Formal erhalten wir einen **gerichteten gewichteten Hypergraphen**

<u>Annahme:</u> $\mathcal{T} \subset X$ ist robust vorwärtsinvariant, d.h. für alle $x \in X$ gibt es eine Steuerung $u \in U$, so dass
$$f(x,u,W) \subset \mathcal{T}.$$

Kostenfunktion
$$g : X \times U \to [0,\infty) \quad , \quad g(x,u) = 0 \iff x \in \mathcal{T}$$

akkumulierte Kosten
$$J(x,\bar{u},\bar{w}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k,u_k)$$

wobei $x = x_0$, $\bar{u} = (u_k)_k$, $\bar{w} = (w_k)_k$ und $x_{k+1} = f(x_k,u_k,w_k)$.

Spieltheoretische Sichtweise:

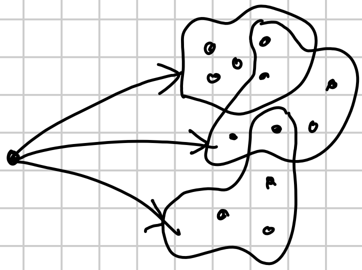
- Spieler 1 will J minimieren, Spieler 2 maximieren. („Zwei-Personen-Nullsummenspiel")
- Spieler 1 wählt u_k, danach wählt Spieler 2 w_k, d.h. Spieler 2 wählt $\bar{w} = \beta(\bar{u})$ aufgrund einer Strategie $\beta : U^{\mathbb{N}} \to W^{\mathbb{N}}$. Spieler 2 kann allerdings zukünftige u_k's nicht vorhersehen und daher gilt
$$u_k = u_k' \text{ für } k \le K$$
$$\Rightarrow \beta(\bar{u})_k = \beta(\bar{u}')_k \text{ für } k \le K.$$
Solche Strategien heißen nicht-vorhersehend. Die Menge dieser Strategien sei $\mathcal{B}$.

- Wir definieren die obere Wertefunktion
$$V(x) = \sup_{\beta \in \mathcal{B}} \inf_{\bar{u} \in U^{\mathbb{N}}} J(x,\bar{u},\beta(\bar{u}))$$
Sie erfüllt das Optimalitätsprinzip
$$V(x) = \inf_{u \in U} \left\{ g(x,u) + \sup_{w \in W} V(f(x,u,w)) \right\}.$$

Knoten: $\mathcal{P}$

Kanten: $(P, \mathcal{N})$ mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}$

Gewichte: $g(P, \mathcal{N})$



(iv) verallgemeinerter Dijkstra-Algorithmus

Dijkstra:

$V(P) := \infty \quad \forall P \in \mathcal{P}$

$V(0) := 0$

$Q := \mathcal{P}$

while $Q \neq \emptyset$

$\quad P := \underset{P' \in Q}{\operatorname{argmin}}\, V(P')$

$\quad Q := Q \setminus \{P\}$

$\quad$ for each $Q \in \mathcal{P}$ with $(Q, P) \in E$

$\quad\quad$ if $V(Q) > w(Q,P) + V(P)$

$\quad\quad\quad V(Q) := w(Q,P) + V(P)$

minmax-Dijkstra

$V(0) = 0$

for each $(Q, \mathcal{N}) \in E$ with $P \in \mathcal{N}$

$\quad$ if $V(Q) > g(Q, \mathcal{N}) + \max_{N \in \mathcal{N}} V(N)$

$\quad\quad V(Q) := g(Q, \mathcal{N}) + \max_{N \in \mathcal{N}} V(N)$

Beobachtung: Falls $\mathcal{N} \subset \mathcal{P} \setminus Q$ (also alle Knoten in $\mathcal{N}$ bereits ihre endgültigen V-Werte zugewiesen bekommen haben), dann gilt

$$\max_{N \in \mathcal{N}} V(N) = V(P)$$

wir erhalten also

for each $(Q, \mathcal{N}) \in E$ with $P \in \mathcal{N}$

$\quad$ if $\mathcal{N} \subset \mathcal{P} \setminus Q$

$\quad\quad$ if $V(Q) > g(Q,P) + V(P)$

$\quad\quad\quad V(Q) := g(Q,P) + V(P)$.