Numerik gesteuerter Systeme SS07

Notiztitel 19.04.2007

0. Einführung und motivierendes Beispiel

Dynamisches System:

a) zeit-kontinuierlich:

$$\dot{x} = g(x), \qquad g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \text{ glatt}$$

$\rightsquigarrow$ Fluss $\varphi(t,\cdot): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

Trajektorien $\{\varphi(t,x_0) \mid t \geq 0\}$

- Berechnung von Trajektorien: Numerik III
- Berechnung des Langzeitverhaltens $(t \to \infty)$: Numerik dynamischer Systeme

b) zeit-diskret:

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

z.B. $\qquad = \varphi(T, x_k)$

Kontrollsystem (gesteuertes System):

a) zeit-kontinuierlich:

$$\dot{x} = g(x,u)$$

Steuer-/Kontrollfunktion $u: \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^m$

Fluss: $\varphi(t,x,u)$

b) zeit-diskret:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$u_k \in U \subset \mathbb{R}^m$,

Steuerfolge / Kontrollfolge $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Fragestellungen:

(i) Steuerbarkeit / Erreichbarkeit
gegeben $x, y \in \mathbb{R}^d$, gibt es eine Steuerung u, so dass $y = \varphi(t, x, u)$ für ein $t \geq 0$?

(ii) Stabilisierung: konstruiere einen Regler $u : S \to U$, $S \subset \mathbb{R}^d$, so dass das geschlossene System

$$\dot{x} = g(x, u(x))$$

bzw. $$x_{k+1} = f(x_k, u(x_k))$$

stabil ist, d.h. alle Trajektorien zu Anfangswerten in S gegen eine Zielmenge T konvergieren.

(iii) optimale Steuerung / Regelung:
zusätzliche ist eine Kostenfunktion (Energieverbrauch, Investitionskosten, ...) auf den gesteuerten Trajektorien gegeben.
Fragestellung: bestimme unter allen zulässigen Steuerungen diejenige, die die Kostenfunktion optimiert.

Erweiterungen / Variationen:

(a) (stochastisch) gestörte Probleme

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$

$w_k \in W \subset \mathbb{R}^e$ (z.B. zufällig)

(b) dynamische Spiele

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$

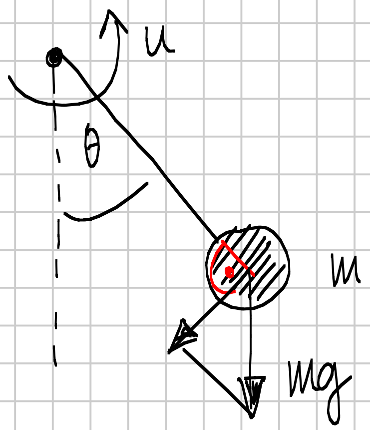
+ Kostenfunktion, die von (u_k) und von (w_k) abhängt

(c) Markov-Spiele:

$$x_{k+1} \sim p(x_k, u_k, w_k)$$

+ Kostenfunktion

<u>Beispiel: Das invertierte Pendel</u>



Ziel: Steuerung / Stabilisierung in die / der oberen (instabilen) Ruhelage

<u>Modell:</u> Newton $\qquad F = ma$

$$-\sin\theta(t)\, mg + u(t) = m\ddot{\theta}(t)$$

m: Masse, g: Gravitationskonstante, u: Drehmoment

Vereinfachung: $m=1$, $g=1$

$(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt für $u=0$.

<u>Ziel</u>: Stabilisierung von $(\pi, 0)$.

<u>Linearisiertes Modell</u>: $\sin\theta \simeq -(\theta - \pi)$ für θ nahe π

neue Variable: $\varphi = \theta - \pi$

$$\rightsquigarrow \qquad \varphi(t) + u(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

als System 1. Ordnung:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

<u>1. Versuch: proportionaler Regler</u>

falls $\varphi > 0$ steuere nach rechts,
falls $\varphi < 0$ steuere nach links:

$$u(t) = -\alpha \varphi(t)$$

geschlossenes System: $\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) + \alpha \varphi(t) = 0$
bzw. als System 1. Ordnung

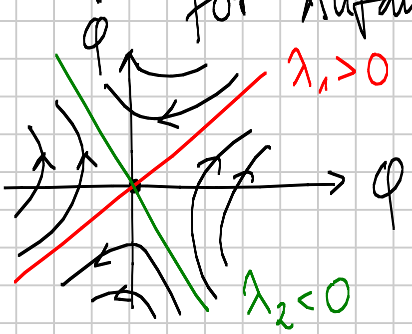
$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Eigenwerte der Systemmatrix:

$$\lambda^2 - 1 + \alpha = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-\alpha}$$

(i) $\alpha > 1$: $\lambda_{1,2} \in i\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ oszillatorisches Verhalten
(ii) $\alpha \leq 1$: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \leq 0$ $\rightsquigarrow$ $\|\varphi(t)\| \to \infty$ außer für Anfangswerte



$$\varphi(t) = e^{\lambda_{1,2} t} v_{1,2}$$

2. Versuch: PD („proportional-derivative") Regler:

$$u(t) = -\alpha \varphi(t) + \beta \dot{\varphi}(t)$$

geschlossenes System: $\ddot{\varphi}(t) - \beta \dot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0$

bzw. als System erster Ordnung:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + (1-\alpha)}$$

Für $\beta < 0$ und $\alpha > 1$ erhalten wir negative Realteile und damit ein (asymptotisch) stabiles System.

Frage: Funktioniert dieser PD-Regler auch für das ursprüngliche (nichtlineare) System?

Antwort: Ja, aber nur lokal!

⇝ Konstruktion allgemeiner Regler für (globale) Stabilisierung nichtlinearer Systeme

1. Grundbegriffe

Lineares Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Explizite Lösung:

$$x(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds$$

Regularität von u: Integral ╱ muss existieren

<u>Definition 1.1:</u> Eine Funktion $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ heißt stückweise stetig, falls sie auf jedem kompakten Intervall nur endlich viele Unstetigkeitsstellen hat und dort beschränkt ist.
Sei $\mathcal{U}$ der Raum aller stückweise stetigen Funktionen $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

<u>Definition 1.2:</u> Ein Zustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt zu einem Zustand $x_1 \in \mathbb{R}^d$ steuerbar (kontrollierbar) (zur Zeit t_1), falls es eine Steuerfunktion $u \in \mathcal{U}$ gibt, so dass

$$x_1 = x(t_1, x_0, u)$$

↳ Lösung des Kontrollsystems

(wobei $x(t, x_0, u) := x(t, 0, x_0, u)$ die Lösung des K-Sys. bez.)

<u>Proposition 1.3:</u> Für lineare Kontrollsysteme (1.1) gilt: x_0 ist genau dann zu x_1 steuerbar, falls 0 zu $x_1 - x(t_1, x_0, 0)$ steuerbar ist.

<u>Beweis:</u> Es gilt

$$\begin{aligned} x_1 - x(t_1, x_0, 0) &= x(t_1, x_0, u) - x(t_1, x_0, 0) \\ &= \cancel{e^{At_1} x_0} + \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - s)} B u(s)\, ds - \cancel{e^{At_1} x_0} \\ &= x(t_1, 0, u) \end{aligned}$$

∎