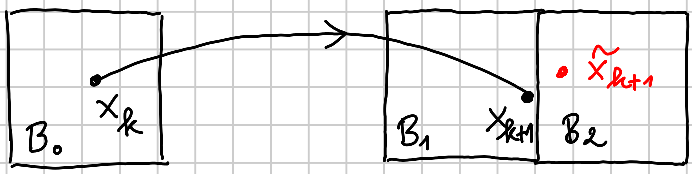
(5.4) Ein robuster Regler

Problem: Regler vom vorigen Abschnitt ist nicht robust, d.h. kleinste Störungen des Kontrollsystems können dazu führen, dass der Regler das System nicht mehr stabilisieren kann:



Falls $V_p(B_2) > V_p(B_0)$, dann gilt

$$V_p(\tilde{x}_{k+1}) > V_p(x_k),$$

d.h. V_p ist keine Lyapunov-Funktion.

Abhilfe:

- explizite Modellierung von Störungen:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$

z.B. $f(x_k, u_k, w_k) = \tilde{f}(x_k, u_k) + w_k \quad , \quad w_k \in B_0(\varepsilon)$

- Erweiterung der graphentheoretischen Konstruktion aus dem letzten Abschnitt

(i) Diskretisierung des ungestörten Bellman-Operators

Optimalitätsprinzip

$$V(x) = \inf_{u \in U} \{ g(x,u) + V(f(x,u)) \}$$

Bellman-Operator

$$T(v)(x) = \inf_{u\in U} \{ g(x,u) + V(f(x,u)) \}$$

$\mathcal{P}$: Partition von X, d.h. endliche Menge von paarweise disjunkten Teilmengen von X, der Vereinigung X überdeckt.

$\pi : X \to \mathcal{P}$, $\pi(x) = P$, $x \in P$

$\mathbb{R}^X = \{ f : X \to \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^{\mathcal{P}} = \{ f : \mathcal{P} \to \mathbb{R} \}$, Raum der Funktionen, die auf den Elementen von $\mathcal{P}$ stückweise konstant sind

Projektion: $\varphi : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^{\mathcal{P}}$

$$\varphi_{\mathcal{P}}(v)(x) = \inf_{x' \in \pi(x)} v(x')$$

Diskretisierter Bellman-Operator: $T_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}^{\mathcal{P}}$

$$T_{\mathcal{P}} = \varphi_{\mathcal{P}} \circ T$$

Explizit:

$$T_{\mathcal{P}}(v)(x) = \varphi_{\mathcal{P}}\big(T(v)\big)(x)$$

$$= \inf_{x' \in \pi(x)} \inf_{u\in U} \{ g(x',u) + v(f(x',u)) \}$$

stückweise konstant

$$= \min_{P' \cap f(\pi(x),U) \neq \emptyset} \inf_{\substack{x' \in \pi(x),\, u \in U \\ f(x',u) \in P'}} \{ g(x',u) + v(P') \}$$

$$= \min_{P' \cap f(\pi(x),U) \neq \emptyset} \Big\{ \inf_{\underbrace{\substack{x' \in \pi(x) \\ u \in U \\ f(x',u) \in P'}}} g(x',u) + v(P') \Big\}$$

$= w(\pi(x), P')$ mit dem
Gewicht w aus (5,1)

Und mit $\pi(x) = P$

$$T_P(v)(P) = \min_{P' \cap f(P,U) \neq \emptyset} \{ w(P,P') + v(P') \}$$

Ein Fixpunkt $V_P = T_P(V_P)$ erfüllt also das diskrete Optimalitätsprinzip

$$\boxed{V_P(P) = \min_{P' \cap f(P,U) \neq \emptyset} \{ w(P,P') + v(P') \}.}$$

→ Invariante im Dijkstra-Algorithmus.