Numerik gesteuerter Systeme

4. Optimale Regelung I: zeit-kontinuierliche Systeme

4.1 Problemstellung

gegeben: Kontrollsystem $\dot{x} = f(x,u)$

$f: \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$ gleichmäßig Lipschitz-stetig in x mit Konstante L, $U \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $\mathcal{U} = L_\infty(\mathbb{R}, U)$

\+ Kostenfunktion

$$g: \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$$

global beschränkt durch Konstante M_g, gleichmäßig Lipschitz-stetig im ersten Argument mit Konstante L_g.

gesucht: zum Anfangswert x_0 bestimme diejenige Kontrollfunktion $u = u(t; x_0) \in \mathcal{U}$, die das diskontierte Kostenfunktional

$$J(x_0,u) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-\delta t}}_{\text{Diskontierung}} g(\underbrace{\varphi(t,x,u)}_{\text{Lösung von } \dot{x}=f(x,u)}, u(t))\, dt < \infty$$

maximiert (oder minimiert). Hier ist $\delta > 0$ die Diskontrate.

4.2 Die optimale Wertefunktion

Den Wert

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(x,u)$$

bezeichnet man als die optimale Wertefunktion des Problems.

Bemerkung: – V wird (später) als Lyapunov-Funktion verwendet

– Aus V lässt sich direkt eine optimale Kontrollfunktion berechnen (später).

Lemma 4.1: (a) J ist global beschränkt: $|J(x,u)| \leq \frac{M_g}{\delta}$

(b) Für ε-optimale Steuerung genügt die Betrachtung endlicher Zeitintervalle: Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zeit $T_\varepsilon > 0$ und eine Kontrollfunktion $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$, so dass für jede Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ mit

$$u|_{[0,T_\varepsilon]} = u_\varepsilon|_{[0,T_\varepsilon]}$$

gilt.

$$J(x,u) \geq V(x) - \varepsilon$$

Beweis: (a)
$$|J(x,u)| = \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u), u(t))\, dt \right|$$
$$\leq \int_0^\infty e^{-\delta t} |g(\varphi(t,x,u), u(t)|\, dt$$
$$\leq \int_0^\infty e^{-\delta t} M_g\, dt = M_g \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \right]_0^\infty = \frac{M_g}{\delta}$$

(b) Sei $T_\varepsilon = -\frac{1}{\delta} \log \frac{\varepsilon \delta}{4 M_g}$ und $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ so, dass $J(x,u_\varepsilon) \geq V(x) - \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $u \in \mathcal{U}$ mit $u|_{[0,T_\varepsilon]} = u_\varepsilon|_{[0,T_\varepsilon]}$

Dann gilt

$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u), u(t))\, dt$$
$$= \int_0^{T_\varepsilon} e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u), u(t))\, dt + \int_{T_\varepsilon}^\infty \cdots \, dt$$

$$= \int_0^{T_\varepsilon} e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u_\varepsilon), u_\varepsilon(t))\,dt + \int_{T_\varepsilon}^{\infty} \cdots u, u(t))\,dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u_\varepsilon), u_\varepsilon(t))\,dt} + \int_{T_\varepsilon}^{\infty} e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u), u(t))\,dt - \int_{T_\varepsilon}^{\infty} e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u_\varepsilon), u_\varepsilon(t))\,dt$$

$$\geq V(x) - \frac{\varepsilon}{2} - 2M_g \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \right]_{T_\varepsilon}^{\infty}$$

$$= V(x) - \frac{\varepsilon}{2} - 2M_g \left(\frac{1}{\delta} \frac{\varepsilon\delta}{4M_g} \right) = V(x) - \varepsilon .$$

$\boxtimes$

<u>Definition 4.2:</u> Sei $\gamma > 0$. Eine Funktion $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt *γ-Hölder-stetig*, falls es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass

$$|F(x) - F(y)| \leq K \|x - y\|^\gamma$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$.

<u>Satz 4.3</u> (Regularität der optimalen Wertefunktion)

(i) $\delta > L$: V ist Lipschitz-stetig mit Konst. $\frac{L_g}{\delta - L}$

(ii) $\delta = L$: V ist lokal γ-Hölder-stetig für $\gamma \in (0,1)$

typisch → (iii) $\delta < L$: V ist γ-Hölder-stetig mit $\gamma = \frac{\delta}{L - \delta}$.

<u>Beweis:</u> Da f bzgl. x Lipschitz-stetig ist, gilt

$$\|\varphi(t,x,u) - \varphi(t,y,u)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t L \|\varphi(t,x,u) - \varphi(t,y,u)\|\,dt$$

$$\left(\text{denn } \varphi(t,x,u) = x + \int_0^t f(\varphi(\tau,x,u), u(\tau))\,d\tau \right)$$

also $\quad \|\varphi(t,x,u)-\varphi(t,y,u)\| \le \|x-y\| e^{Lt} \quad$ (Gronwall)

Damit wird

$$|J(x,u)-J(y,u)| \le \int_0^\infty e^{-\delta t} |g(\varphi(t,x,u),u(t)) - g(\varphi(t,y,u),u(t))| dt$$

$$\le \underbrace{\int_0^T e^{-\delta t} L_g \|x-y\| e^{Lt} dt}_{=I_1} + \int_T^\infty e^{-\delta t} 2M_g \, dt$$

$$\underbrace{= L_g \|x-y\| \left[\frac{1}{L-\delta} e^{(L-\delta)t}\right]_0^T + 2M_g \frac{e^{-\delta T}}{\delta}}_{=a}$$

(*)

(i) $\delta > L$: wähle $T=\infty \Rightarrow a \le \frac{L_g}{\delta - L}\|x-y\|$

(ii) $\delta = L$: wähle $T = \frac{1}{\delta} \log \frac{2M_g}{L_g\|x-y\|}$

$\rightsquigarrow I_1 = L_g \|x-y\| \frac{1}{\delta} \log \frac{2M_g}{L_g\|x-y\|}$

nutze, dass für alle $\gamma \in (0,1)$ ein $B>0$ existiert, so dass $C \log \frac{M}{C} \le BC^\gamma$ für $C \in [0,M] \Rightarrow$ lokal γ-Hölder-stetig

(iii) $\delta < L$: wähle $T = \frac{1}{L-\delta} \log \frac{2M_g}{L_g\|x-y\|}$

$\Rightarrow \gamma$-Hölder-stetig mit $\frac{\delta}{L-\delta}$.

Nun ist

$$|V(x)-V(y)| = \left|\sup_{u\in\mathcal{U}} J(x,u) - \sup_{u\in\mathcal{U}} J(y,u)\right|$$

$$= \underbrace{\sup_{u\in\mathcal{U}} J(x,u)} - \sup_{u\in\mathcal{U}} J(y,u)$$

$$\le J(x,u_\varepsilon)+\varepsilon - J(y,u_\varepsilon) \quad \text{für geeignetes } u_\varepsilon$$

$$\le |J(x,u_\varepsilon) - J(y,u_\varepsilon)| + \varepsilon \quad \text{und } \forall \varepsilon > 0$$

$$\leq \sup_{u\in\mathcal{U}} |J(x,u)-J(y,u)| + \varepsilon$$

Da diese Abschätzung für alle $\varepsilon>0$ gilt, folgt

$$|V(x)-V(y)| \leq \sup_{u\in\mathcal{U}} |J(x,u)-J(y,u)| \quad ,$$

d.h. mit $(*)$ folgt die Behauptung. ∎

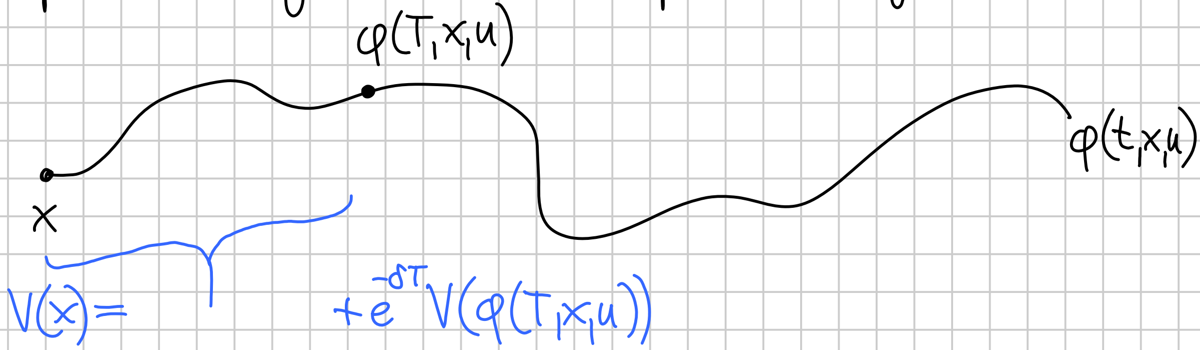
(4.3) Das Bellmansche Optimalitätsprinzip und die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Satz 4.4: Die optimale Wertefunktion ist die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung

$$V(x) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \left[\int_0^T e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u),u(t))\,dt + e^{-\delta T} V(\varphi(T,x,u)) \right]$$

für alle $x\in\mathbb{R}^d$ und alle $T>0$.

"Endstücke optimaler Trajektorien sind optimale Trajektorien."



Beweis: "$\leq$" Sei $x\in\mathbb{R}^d$, $T>0$ und $u\in\mathcal{U}$, es gilt

$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u),u(t))\,dt$$

$$= \int_0^T e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u),u(t))\,dt + \int_T^\infty \cdots \,dt$$

$$= \int_0^T \text{—"—}\,dt + e^{-\delta T} \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\varphi(t,\varphi(T,x,u)),u(T+t))\,dt$$

$$\leq \int_0^T \quad -''- \quad dt + e^{-\delta T} V(\varphi(T,x,u))$$

gilt für alle u, also auch für $\sup_u J(x,u) = V(x)$.

"$\geq$": Sei $x \in \mathbb{R}^d$, $T>0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Kontrollfunktion $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ mit

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \left[\int_0^T e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u),u(t))\,dt + e^{-\delta T} V(\varphi(T,x,u)) \right]$$

$$(*) \qquad \leq \int_0^T e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u_\varepsilon),u_\varepsilon(t))\,dt + e^{-\delta T} V(\varphi(T,x,u_\varepsilon))\Big] + \varepsilon$$

u_ε ist beliebig auf $[T,\infty)$. Wähle $u_\varepsilon|_{[T,\infty)}$ so, dass

$$J(\varphi(T,x,u_\varepsilon),u_\varepsilon(T+\cdot)) \geq V(\varphi(T,x,u_\varepsilon)) - \varepsilon$$

dann folgt in $(*)$ weiter

$$\leq \int_0^T e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u_\varepsilon),u_\varepsilon(t))\,dt + e^{-\delta T}\Big(J(\varphi(T,x,u_\varepsilon),u_\varepsilon(T+\cdot)) + \varepsilon\Big) + \varepsilon$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} g(\varphi(t,x,u_\varepsilon),u_\varepsilon(t))\,dt + \left(1 + e^{-\delta T}\right)\varepsilon$$

und da ε beliebig war, folgt "$\geq$".