NCS

Notiztitel 05.07.2007

5.3 Berechnung eines (approximativ) optimalen Reglers

Erinnerung: Optimalitätsprinzip

$$V(x) = \inf_{u\in U} \{g(x,u) + V(f(x,u))\}$$

Wir definieren $u_{\mathcal{P}} : S \to U$

$$u_{\mathcal{P}}(x) := \operatorname*{argmin}_{u\in U} \{g(x,u) + V_{\mathcal{P}}(f(x,u))\}$$

Geschlossenes System („closed loop system"):

$$x_{k+1} = f(x_k, u_{\mathcal{P}}(x_k)) \quad , \quad k = 0,1,2,\dots \qquad (*)$$

Hoffnung: 0 ist global asymptotisch stabiler Fixpunkt von $(*)$ und $J = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k, u_{\mathcal{P}}(x_k))$ ist approximativ minimal.

Satz 5.4: Angenommen, V ist stetig in 0. Es sei $\mathcal{P}^{(\ell)}$ eine geschachtelte Folge von Partitionen und $D \subset S$ eine offene Menge mit den folgenden Eigenschaften

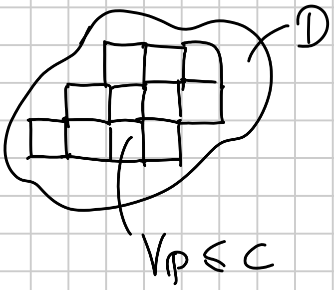
(i) $0 \in \operatorname{int} D$

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\ell_0 = \ell_0(\varepsilon)$, so dass

$$V(x) - V_{\mathcal{P}^{(\ell)}}(x) < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und $\ell \geq \ell_0$. (gleichmäßige Konvergenz).

Es sei $c > 0$ die größte Zahl, ~~d~~ so dass



$$D_c^{(\ell)} = V_{P(\ell)}^{-1}([0,c]) \subset D.$$

für alle ℓ.

Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Funktion $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\delta(\alpha) \to 0$ für $\alpha \to 0$, so dass für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\ell \geq \ell_0$, $\eta \in (0,1)$, $x_0 \in D_c^{(\ell)}$ die Trajektorie des geschlossenen Systems erfüllt:

$$V(x_k) \leq \max\Big\{ V(x_0) - (1-\eta)\sum_{j=1}^{k-1} g(x_j, u_{P(\ell)}(x_j)),$$
$$\delta\Big(\frac{\varepsilon}{\eta}\Big) + \varepsilon \Big\}.$$

<u>Beweis:</u> Zu $x \in D$ definieren wir $g_0(x) = \min_{u\in U} g(x,u)$. Wir wählen ε_0 so, dass

$$g_0(x) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad V(x) \leq c - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

(ein solches ε_0 existiert, da V stet. in 0 ist).
Wähle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ und $\ell \geq \ell_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ beliebig.

(i) $D_c^{(\ell)}$ ist <u>invariant</u>, d.h. $x_k \in D_c^{(\ell)} \Rightarrow x_{k+1} \in D_c^{(\ell)}$:
Sei $x \in D_c^{(\ell)}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
V_{P(\ell)}(x) + \frac{\varepsilon}{2} &\geq V(x) \\
&= \inf_{u\in U} \{ g(x,u) + V(f(x,u)) \} \\
&\geq \inf_{u\in U} \{ g(x,u) + V_{P(\ell)}(f(x,u)) \} \\
&= g(x, u_P(x)) + V_{P(\ell)}(\underbrace{f(x, u_P(x))}_{\text{"}= x_{k+1}\text{"}})
\end{aligned}$$

also folgt

$$V_{p(\varepsilon)}(x_{k+1}) \le V_{p(\varepsilon)}(x_k) - g(x_k, u_p(x_k)) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

<u>Fall (a): $g(x_k, u_p(x_k)) \ge \frac{\varepsilon}{2}$:</u>

$$V_{p(\varepsilon)}(x_{k+1}) \le V_{p(\varepsilon)}(x_k) \le c \quad \Rightarrow x_{k+1} \in D_c^{(\varepsilon)}$$

<u>Fall (b): $g(x_k, u_p(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$:</u>

$$\Rightarrow g_0(x_k) = \min_{u \in U} g(x_k, u) < \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\Rightarrow V(x_k) \le c - \frac{\varepsilon_0}{2} \le c$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} V_p(x_{k+1}) \le V_{p(\varepsilon)}(x_k) + \frac{\varepsilon}{2} \le V(x_k) + \frac{\varepsilon}{2} \le c$$

also $x_{k+1} \in D_c^{(\varepsilon)}$.

(ii) Aus $(*)$ folgt

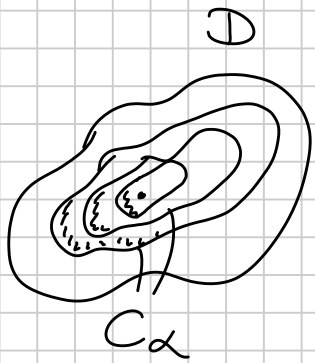
$$V(x_{k+1}) \le V_{p(\varepsilon)}(x_k) - g(x_k, u_{p(\varepsilon)}(x_k)) + \varepsilon$$

$$\le V(x_k) - g(x_k, u_{p(\varepsilon)}(x_k)) + \varepsilon \qquad (**)$$

(iii) Konstruktion von $\delta(\alpha)$:

Sei $C_\alpha = \{x \in D_c^{(\varepsilon)} \mid g_0(x) \le \alpha\}$

und $\delta(\alpha) = \sup_{x \in C_\alpha} V(x)$



($\delta(\alpha) \to 0$ für $\alpha \to 0$, da V stetig in 0 und $V(0) = 0$).

<u>Behauptung:</u> $V(x_k) \le \delta(\alpha) + \varepsilon \Rightarrow V(x_{k+1}) \le \delta(\alpha) + \varepsilon$

für $\alpha \ge \varepsilon$.

Fall (a): <u>$V(x_k) \le \delta(\alpha)$:</u>

Mit $(**)$ folgt

$$V(x_{k+1}) \le V(x_k) - g(x_k, u_p(x_k)) + \varepsilon$$

$$\le \delta(\alpha) + \varepsilon$$

Fall (b): $V(x_k) \in (\delta(\alpha), \delta(\alpha)+\varepsilon]$:

$$\Rightarrow x_k \notin C_\alpha \Rightarrow \underbrace{g_0(x_k)}_{\overset{\shortparallel}{\min_{u\in U} g(x_k,u)}} > \alpha$$

also

$$V(x_{k+1}) \leq V(x_k) \underbrace{- g(x_k, u_p(x_k))}_{>\alpha\geq\varepsilon} + \varepsilon$$

$$\leq V(x_k)$$

$$\leq \delta(\alpha)+\varepsilon.$$

Sei $\eta\in(0,1)$ und $k\in\mathbb{N}$. Falls $V(x_k)\leq\delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)+\varepsilon$, bleibt nichts zu zeigen. Falls $V(x_k) > \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)+\varepsilon$, dann gilt $V(x_j) > \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)+\varepsilon$, $j=0,\dots,k-1$, d.h. $x_j\notin C_{\frac{\varepsilon}{\eta}}$, d.h. $g(x_j,u_p(x_j)) > \frac{\varepsilon}{\eta}$,

also $\eta g(x_j,u_p(x_j)) > \varepsilon$

Mit (**) folgt

$$V(x_{j+1}) \leq V(x_j) - g(x_j, u_{p(\varepsilon)}(x_j)) + \varepsilon$$
$$\leq V(x_j) - (1-\eta)\, g(x_j, u_{p(\varepsilon)}(x_j))$$

Wenden wir diese Ungleichung wiederholt an, so erhalten wir die Aussage. ∎

(5.4) Adaptive Konstruktion der Partition

Ziel: adaptive Verfeinerung der Partition

$\rightsquigarrow$ aposteriori Fehlerschätzer

$S_0 = \{x\in X \mid V(x)<\infty\}$

Residuum

$$r_p(x) = \inf_{u\in U}\{g(x,u) + V_p(f(x,u))\} - V_p(x)$$

Es gilt $r_p(x)\geq 0$, da

$$r_P(x) \le \inf_{u\in U}\{g(x,u) + V(f(x,u))\} - V_P(x)$$
$$= V(x) - V_P(x)$$

<u>Proposition 5.5:</u> Das Residuum r_P ist eine untere Schranke für den Fehler auf S_0.

Im folgenden Satz verwenden wir wieder die Bezeichnungen

$$g_0(x) = \min_{u\in U} g(x,u)$$
$$D_c = V_P^{-1}([0,c])$$
$$C_\alpha = \{x\in D_c \mid g_0(x) \le \alpha\}$$
$$\delta(\alpha) = \sup_{x\in C_\alpha} V(x)$$

<u>Satz 5.6:</u> Angenommen, es gibt ein $\varepsilon>0$ und ein $\eta\in(0,1)$, so dass
$$r_P(x) \le \max\{\eta g_0(x), \varepsilon\}$$
für alle $x\in D_c$. Dann gilt für die Trajektorie des geschlossenen Systems
$$V_P(x_k) \le \max\Big\{V_P(x_0) - (1-\eta)\sum_{j=1}^{k-1} g(x_j, u_P(x_j)),$$
$$\delta\Big(\frac{\varepsilon}{\eta}\Big) + \varepsilon\Big\}.$$

<u>Beweis:</u> (i) Wir zeigen zunächst, dass
$$V(x_k) \le \delta\Big(\frac{\varepsilon}{\eta}\Big) + \varepsilon \Rightarrow V(x_{k+1}) \le \delta\Big(\frac{\varepsilon}{\eta}\Big) + \varepsilon:$$
Fall (a): $r_P(x_k) \le \eta g_0(x_k)$, dann gilt
$$V_P(x_{k+1}) \le V_P(x_k) - g(x_k, u_P(x_k)) + r_P(x_k) \quad (*)$$
$$\le V_P(x_k) - g(x_k, u_P(x_k)) + \eta g_0(x_k)$$

$$\leq V_\rho(x_k)$$

Fall (b): $r_\rho(x_k) > \eta g_0(x_k)$:
Dann gilt $r_\rho(x_k) \leq \varepsilon$ und wir haben zwei Fälle:

(i) $V_\rho(x_k) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)$:

$$(*) \Rightarrow V_\rho(x_{k+1}) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon$$

(ii) $V_\rho(x_k) \in \left(\delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right), \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon\right]$:

$$\Rightarrow x_k \notin C_{\frac{\varepsilon}{\eta}}, \text{ also } g_0(x_k) > \frac{\varepsilon}{\eta}$$

$$\Rightarrow V_\rho(x_{k+1}) \leq V_\rho(x_k) \underbrace{- g(x_k, u_\rho(x_k)) + \varepsilon}_{> \varepsilon}$$

$$\leq V_\rho(x_k) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon$$

Falls also $V_\rho(x) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon$ für alle $x \in D_c$, dann sind wir fertig. Sei also nun $V_\rho(x) > \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon$ für ein $x \in D_c$, $c > \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon$

Betrachten wir nun eine Iterierte x_k

- Gilt $V_\rho(x_k) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon$, ✓
- Andernfalls ist $V_\rho(x_k) > \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon$

$$\Rightarrow x_k \notin C_{\varepsilon/\eta}$$

$$\Rightarrow g(x_k, u_\rho(x_k)) > \frac{\varepsilon}{\eta}$$

$r_\rho(x) \leq \max\{\eta g_0(x), \varepsilon\}$

$$\Rightarrow r_\rho(x) \leq \eta g(x_k, u_\rho(x_k))$$

$$\Rightarrow V_\rho(x_{j+1}) \leq V_\rho(x_j) - g(x_j, u_\rho(x_j)) + r_\rho(x_j)$$

$$\leq V_\rho(x_j) - (1-\eta) g(x_j, u_\rho(x_j))$$

Induktion liefert die Aussage. ∎