Prof. Dr. O. Junge, A. Schreiber
Zentrum Mathematik - M3
Technische Universität München

GITTERFREIE METHODEN - WINTERSEMESTER 2014/15

Übungsblatt zum Workshop 1 – 2014-12-02

A1 (Interpolation stationär und nichtstationär)
Interpolieren Sie Frankes Funktion (`franke` in MATLAB) auf $[0,1]^2$,

$$f(x,y) = \frac{3}{4}e^{-((9x-2)2+(9y-2)2)/4} + 34e^{-((9x+1)2/49-(9y+1)/10)} \\ + 12e^{-((9x-7)2+(9y-3)2)/4} - 15e^{-((9x-4)2+(9y-7)2)}$$

mit Gauß- und Wendlandfunktionen. Vergleichen Sie jeweils das asymptotische Verhalten für wachsende Zentrenmengen für stationäre (εh konstant) und nichtstationäre (ε konstant) Approximation.

A2 (Kleinste-Quadrate-Approximation)
Verwenden Sie die kleinste-Quadrate-Methode um die Funktion $f(x) = 4^s\Pi_{d=1}^s x_d(1-x_d)$ zu approximieren. Verwenden Sie Gaußfunktionen als radiale Basisfunktionen sowie ein gleichmäßiges Gitter für die Zentren und Haltonpunkte für die Daten.

A3 (Adaptive kleinste-Quadrate-Approximation)

a) Implementieren Sie folgenden Algorithmus zur adaptiven Knoteneinfügung:

   Gegeben seien

   - Datenpunkte $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^s$
   - eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$
   - eine Toleranz $tol > 0$.

   Ziel: Eine kleinste-Quadrate-Approximation an $(x_i, f(x_i))$ finden, so dass bei Verwendung nur möglichst weniger Zentren der l_2-Fehler kleiner als tol ist.

   Vorgehen:

   1. Wähle $M < N$ Anfangszentren $X_0 = \{\xi_1, \ldots, \xi_M\} \subset X$.
   2. Berechne die kleinste-Quadrate-Approximation Q_f von f mit den Zentren X_0 und den zugehörigen l_2-Fehler e an X.
   3. Solange $e > tol$

   3.1 Berechne die lokalen Fehler $w_i = |f_i - Q_f(x_i)|, i = 1, \ldots, N$

   3.2 Finde $x_k \notin X_0$ mit $w_k = \max_i w_i$ und füge x_k zu X_0 hinzu

   3.3 Berechne erneut die kleinste-Quadrate-Approximation und den zugehörigen l_2-Fehler.

b) Vergleichen Sie die notwendige Zahl von Punkten in X_0 für eine gegebene Toleranz für verschiedene Vorgaben (Dimension, Punkteverteilung, Glattheit der Funktion, Basisfunktionen).