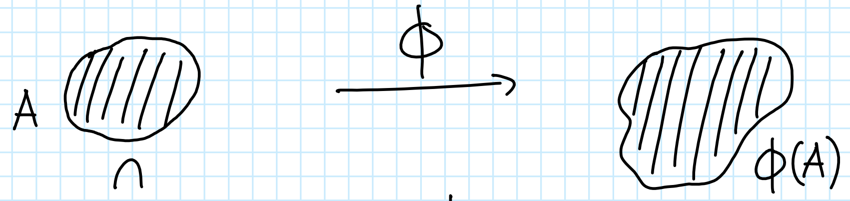
9. Dynamische Systeme : Berechnung kohärenter Mengen

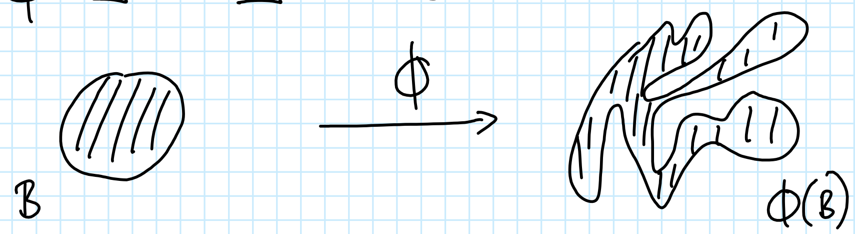
9.1. Modellierung



kohärentes Paar

$\cap$

$\phi : \Omega \to \Omega \subset \mathbb{R}^d$



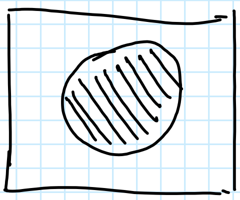
nicht-kohärent

Kreis: minimiert das Verhältnis $\dfrac{m^{d-1}(\partial A)}{m^d(A)}$

Cheeger-Konstante

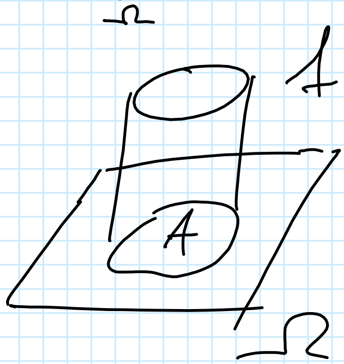
$$h = \inf_{A} \frac{m^{d-1}(\partial A)}{\min\{m(A), m(A^c)\}}$$

$\uparrow$ mit ∂A C^∞



$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f| \, dm$$

Sobolev-Konstante



$f : \Omega \to \mathbb{R}$, C^∞

$$s = \inf_{f \in C^\infty} \frac{\|\nabla f\|_1}{\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|f - \alpha\|_1}$$

(Sublevel-Mengen $\{x \in \Omega \mid f \leq c\}$ definieren A).

SATZ (Federer, Fleming): $\quad s = h$.

Brutale Vereinfachung:

$$\tilde{s} = \inf_{f \in C^\infty} \frac{\|\nabla f\|_2^2}{\inf_\alpha \|f - \alpha\|_2^2}$$

Lösung: Betrachte Eigenwertproblem:

$$\Delta f = \lambda f \qquad \text{auf } \Omega \ (\partial\Omega = \emptyset)$$

(1) Eigenwerte: $0 = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 > \cdots > \to -\infty$

(2) Zugehörige Eigenräume sind endlichdimensional. Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal in L^2. Alle Eigenfunktionen sind C^∞.

(3) $$\lambda_k = -\inf_f \left\{ \frac{\|\nabla f\|_2^2}{\|f\|_2^2}, \langle f, f_j \rangle = 0, \ j = 0, \dots, k-1 \right\}$$
$$= -\frac{\|\nabla f_k\|_2^2}{\|f_k\|_2^2}, \quad \Delta f_k = \lambda_k f_k.$$

Es gilt die Cheeger-Ungleichung:

$$h \leq 2\sqrt{-\lambda_1}$$

Hoffnung: $\approx$ und Sublevelmengen von f_1 liefern das minimierende A.

Mit Dynamik

Annahme: Φ ist volumenerhaltend, d.h. $\det D\Phi = 1$.

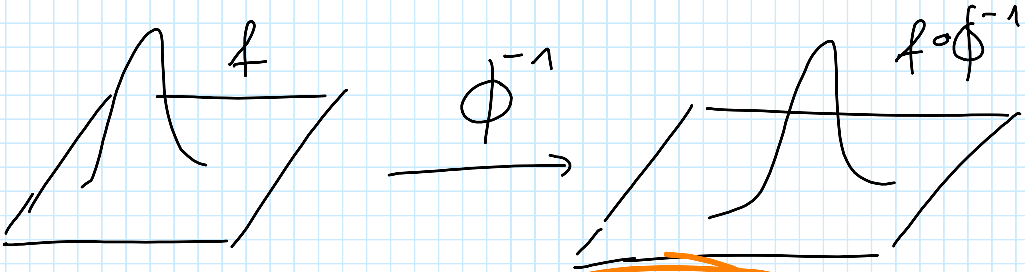
Dynamische Cheeger-Konstante

$$h^D = \inf_{A,\ \partial A} \frac{1}{2}\left(\frac{m^{d-1}(\partial A) + m^{d-1}(\partial \Phi(A))}{\min\{m(A), m(A^c)\}}\right)$$

Wie im statischen Kontext:

dynamische Sobolev-Konstante

$$s^D = \inf_{f\in C^\infty} \frac{\|\nabla f\|_1 + \|\nabla(f\circ\Phi^{-1})\|_1}{2\inf_\alpha \|f-\alpha\|_1}$$



SAD (Froyland, 2014): $s^D = h^D$.

Analog zum statischen Fall vereinfachen wir das Problem, indem wir statt s^D die Zahl

$$\tilde{s}^D = \inf_{f\in C^\infty} \frac{\|\nabla f\|_2^2 + \|\nabla(f\circ\Phi^{-1})\|_2^2}{2\inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \|f-\alpha\|_2^2}$$

Die Lösung dieses Problems ist wieder gegeben durch ein Eigenwertproblem, nämlich

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\left(\Delta + P^*\Delta P\right)u = \lambda u$$

$Pf := f\circ\Phi^{-1}$, P^* Adjungierte, $P^*f = f\circ\Phi$

Eigenschaften wie oben.

Wir interessieren uns wieder für λ_1, u_1. Sublevel-Mengen von u_1 liefern uns kohärente Mengen $A \subset \Omega$.

Diskretisierung des Eigenwertproblems (*)

Wir suchen approximative Lösungen von (*) in dem Approximationsraum

$$\mathcal{A} = \operatorname{span}\{\varphi_j = \varphi(\cdot - y_j),\ j = 1,\dots,N\}$$

mit den Zentren $y_j \in Y$ und $\varphi = \varphi^{\varepsilon}_{s,k}$ (z.B.).

Wähle Kollokationspunkte $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$.

Interpolationsmatrix $A = (\varphi_j(x_i))_{ij}$

d.h. $A\alpha = f$, $f = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$

Anwendung eines linearen Operators $\mathcal{L}$ auf $\tilde{f} \in \mathcal{A}$:

$$\mathcal{L}\tilde{f} = \mathcal{L}\Big(\sum_j \alpha_j \varphi_j\Big) = \sum \alpha_j \mathcal{L}\varphi_j$$

d.h. die Matrix $L' := (\mathcal{L}\varphi_j(x_i))_{ij}$ liefert in Kombination mit der Interpolationsmatrix A eine diskrete Approximation an $\mathcal{L}$:

$$L = L' A^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

gemäß

$$f \in \mathbb{R}^N \xmapsto{A^{-1}} \alpha \in \mathbb{R}^N \xmapsto{L'} (\mathcal{L}f(x_i))_i$$

Anwendung auf $\mathcal{L} = \Delta, \mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ liefert die Matrizen D, P, P^*, zum Beispiel ist

$$D' = (\Delta\varphi_j(x_i))_{ij}$$

...

$$P = \left(\mathcal{P}\varphi_j(x_i)\right)_{ij} = \left(\varphi_j\left(\Phi^{-1}(x_i)\right)\right)_{ij}.$$

Das resultierende diskrete Eigenwertproblem ist

$$\frac{1}{2}\left(D + P^* D P\right)\tilde{u} = \tilde{\lambda}\tilde{u} \quad \text{im } \mathbb{R}^N.$$