8. Dynamische Programmierung mit radialen Basisfunktionen

geg: • zeit-diskretes Kontrollsystem

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f : \underset{\mathbb{R}^s}{\underset{\cap}{\Omega}} \times \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{U}} \to \Omega, \quad f \text{ stetig}$$

• Kostenfunktion $c : \Omega \times U \to [0, \infty)$, stetig

• $T \subset \Omega$ Zielmenge,

$c(x,u) = 0 \iff x \in T$

Ziel: finde ein Feedback (Zustandsrückführung)

$$u : \Omega \to U$$

so, dass das geschlossene System

$$x_{k+1} = f(x_k, u(x_k)) \qquad (*)$$

auf die Zielmenge T zuläuft. Genauer gesagt, so dass für alle $x_0 \in S \subset \Omega$ die zugehörige Trajektorie $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $(*)$ gegen T konvergiert.

Optimierungsansatz:

• akkumulierte Kosten:

$$J(x_0, (u_k)_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c(x_k, u_k) \in [0, \infty]$$

• $$V(x_0) = \inf_{(u_k)_k} J(x_0, (u_k)_k) \in [0, \infty]$$

(optimale) Wertefunktion

• V erfüllt die Fixpunktgleichung

$$V(x) = \inf_{u\in U}\left\{c(x,u)+V(f(x,u))\right\},\quad V(T)=0$$

„Optimalitätsprinzip", „Bellmann-Gleichung"

• naiver Aufwand zur numerischen Darstellung von V : $\mathcal{O}(n^s)$, n^s = Anzahl Zentren

„Fluch der Dimension"

• Mit V definieren wir das Feedback

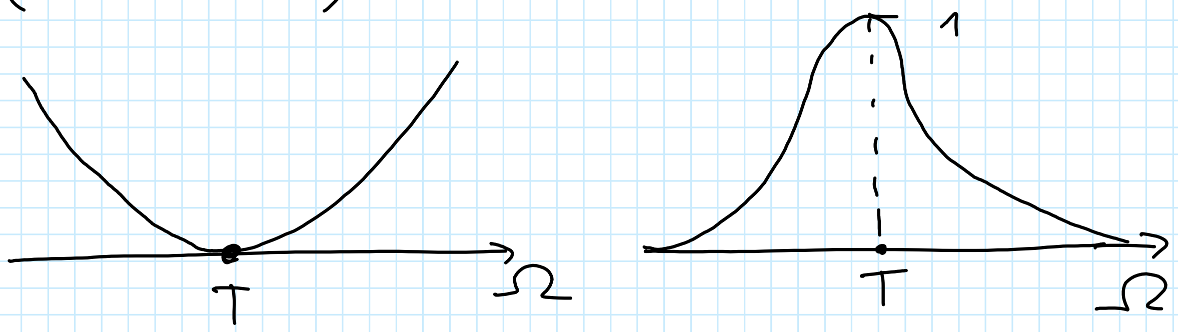
$$u(x) := \operatorname*{argmin}_u \left\{c(x,u)+V(f(x,u))\right\}$$

Jetzt: Berechnung von V durch Fixpunktiteration.

Kružkov-Transformation.

$$V \mapsto v = e^{-V(\cdot)}$$

(wobei $e^{-\infty}=0$).



→ transformierte Bellman-Gleichung

$$v(x) = \sup_{u \in U} \left\{ e^{-c(x,u)} \cdot v(f(x,u)) \right\}$$

$$v(T) = 1$$

Bellman-Kruškov-Operator:

$$\Gamma(v)(x) := \begin{cases} \sup_u \left\{ e^{-c(x,u)} v(f(x,u)) \right\}, & x \in \Omega \setminus T \\ 1 & x \in T \end{cases}$$

und wir suchen jetzt Fixpunkte von Γ.
Falls $c(x,u) > \delta > 0$ für $x \in \Omega \setminus T$, dann ist Γ auf L^∞ eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten

$$L = \sup_{x \in \Omega \setminus T, u \in U} e^{-c(x,u)} < e^{-\delta} < 1$$

und besitzt deshalb einen eindeutigen Fixpunkt.

Diskretisierung von v.

Approximationsraum $W = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_N\}$ (aus der Shepard-Approximation),

$$a_i(x) = \frac{\varphi(\varepsilon \| x_i - x \|)}{\sum_{j=1}^{N} \varphi(\varepsilon \| x_j - x \|)},$$

wobei $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ und φ z.B. Wendland-Fkt.

Shepard-Approximierende

$$S[f](x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, a_i(x)$$

$$S : L^\infty \to W$$

Lemma: $S : (L^\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (W, \|\cdot\|_\infty)$ hat Norm 1.

Beweis: $S[f](x)$ ist ein Konvexkombination der $f(x_i)$:
d.h. für $x \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} |S[f](x)| &= \left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) a_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} |f(x_i)| a_i(x) \\ &\leq \max_{i=1,\dots,N} |f(x_i)| \sum_{i=1}^{N} a_i(x) \leq \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Also $\|S[f]\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Und $\|Sf\|_\infty = \|f\|_\infty$ für konstante f. $\blacksquare$

... das ist gut, denn wir werden den Operator

$$\tilde{\Gamma} := S \circ \Gamma : W \to W$$

iterieren.

SATZ:

$\|S\| = 1$ & Γ Kontraktion $\Rightarrow$ $\tilde{\Gamma}$ Kontraktion

Implementation

Wir führen die Fixpunktiteration

$$\tilde{v}^{(k+1)} = \tilde{\Gamma}\left(\tilde{v}^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

durch. $\tilde{v}^{(0)} \equiv 1$, $\tilde{v}^{(k)} \in W$.

$\tilde{v}$ wird dargestellt durch $\hat{v} \in \mathbb{R}^N$,

$\tilde{v}$ wird dargestellt durch $\hat{v} \in \mathbb{R}^N$,

$$\tilde{v}(x) = \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i \, a_i(x)$$

Fixpunktiteration diskret: $\hat{v}^{(k)} \xrightarrow{\tilde{\Gamma}} \hat{v}^{(k+1)}$

$$\Gamma\left(\tilde{v}^{(k)}\right)(x) = \sup_{u \in U} \left\{ e^{-c(x,u)} \, \tilde{v}^{(k)}\left(f(x,u)\right) \right\}$$

$$= \sup_{u \in U} \left\{ e^{-c(x,u)} \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i^{(k)} a_i\left(f(x,u)\right) \right\}$$

$$\approx \max_{j=1,\dots,M} \left\{ e^{-c(x,u_j)} \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i^{(k)} a_i\left(f(x,u_j)\right) \right\}$$

$$u_1, \dots, u_M \in U$$

$$S \circ \Gamma\left(\tilde{v}^{(k)}\right)(x) = \sum_{\ell=1}^{N} \underbrace{\Gamma\left(\tilde{v}^{(k)}\right)(x_\ell)}_{= \hat{v}_\ell^{(k+1)}} a_\ell(x)$$

d.h. wir müssen berechnen:

$$\hat{v}_\ell^{(k+1)} = \Gamma\left(\tilde{v}^{(k)}\right)(x_\ell) \approx \max_{j=1,\dots,M} \left\{ e^{-c(x_\ell,u_j)} \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i^{(k)} \underbrace{a_i\left(f(x_\ell,u_j)\right)}_{= a_{ji}^{\ell} \in \mathbb{R}^{M \times N}} \right\}$$

$$\max\Big(\underbrace{C^\ell}_{} \, .\!* \, \underbrace{\left(a_{ji}^{\ell}\right)_{ij} \hat{v}^{(k)}}_{} \Big)$$

$$C^\ell \in \mathbb{R}^M$$