7. Bewegliche Kleinste-Quadrate-Approximation

7.1 Gewichtete Kleinste-Quadrate-Approximation

gegeben:
- Knoten / Zentren $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^s$
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$, „glatt"
- Approximationsraum $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_m\}$, $m < N$, $u_1, \dots, u_m : \Omega \to \mathbb{R}$
- Gewichtsfunktion $w : \Omega \to (0, \infty)$
- Skalarprodukt (auf dem $\mathbb{R}^N = \{ (f(x_i))_i \mid f : \Omega \to \mathbb{R} \}$)

$$\langle f, g \rangle_w := \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, g(x_i)\, w(x_i)$$

mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_w$.

Ziel: finde $u \in \mathcal{U}$, so dass $\|f - u\|_w = \min$!

Konstruktion:

$$\begin{aligned}
\|f-u\|_w = \min ! \quad &\Leftrightarrow \quad f - u \perp_w \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \quad \langle f-u, u_k \rangle_w = 0, \quad k = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow \quad \Big\langle f - \sum_{j=1}^{m} c_j u_j, u_k \Big\rangle_w = 0, \quad k = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, u_k \rangle_w = \langle f, u_k \rangle \quad k = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

d.h. die Koeffizienten c_j der Bestapproximierenden $u \in \mathcal{U}$ sind gegeben durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Gc = f. \qquad \text{Normalengleichungen}$$

Gleichungssystems

$$Gc = f_u \qquad \text{Normalengleichungen}$$

wobei $G = \left(\langle u_j, u_k\rangle\right)_{jk}$, $f_u = \left(\langle f, u_1\rangle, \dots, \langle f, u_m\rangle\right)^T$.
Gram-Matrix

7.2 Bewegliche Kleinste-Quadrate-Approximation

Motivation: Wenn wir eine Approximierende u an f im Punkt $x \in \Omega$ bestimmen wollen, dann sollten „in erster Linie" die Werte $f(x_i)$ für Knoten x_i „in der Nähe" von x eine Rolle spielen.

Ansatz: Wir machen die Gewichtsfunktion vom Auswertungspunkt x abhängig: $w^x(\cdot) = w(\cdot, x)$ wobei (typischerweise) $w(x,y) = 0$ (oder klein), falls $\|x-y\| > \delta$ für ein $\delta > 0$.

→ Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle_{w^x} = \sum f(x_i)\, g(x_i)\, w^x(x_i)$

→ ind. Norm $\|x\|_{w^x}$

- bewegliche Kleinste-Quadrate-Approximierende $u_f \in \mathcal{U}$ ist
$$u_f(x) = u^x(x)$$
wobei u^x den Abstand $\|f - u\|_{w^x}$ minimiert.

- Konstruktion:
$$u^x(y) = \sum_{j=1}^{m} c_j^x\, u_j(y - x), \qquad x \in \Omega$$

die Bestapproximierende ist wieder gegeben durch den Vektor $c^x = (c_1^x, \dots, c_m^x)^T$, der das LGS

$$G^x c^x = f_u^x$$

löst, wobei

$$G^x = \left(\langle u_j(\cdot - x), u_k(\cdot - x) \rangle_{w^x} \right)_{jk}$$

$$f_u^x = \left(\langle f, u_1(\cdot - x) \rangle_{w^x}, \dots, \langle f, u_m(\cdot - x) \rangle_{w^x} \right)^T$$

- Auswertung: $u^x(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j^x u_j(0)$

7.3 Shepard's Methode

$m = 1$, $u_1(x) \equiv 1$, d.h. $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{1\}$

[D. Shepard, A two dimensional interpolation function for irregularly spaced data, ..., 1968].

$$G^x = \left(\langle u_1(\cdot - x), u_1(\cdot - x) \rangle_{w^x} \right) = \sum_{j=1}^{N} w^x(x_i)$$

$$f_u^x = \left(\langle f, u_1(\cdot - x) \rangle_{w^x} \right) = \sum_{j=1}^{N} f(x_i) w^x(x_i)$$

$$\Rightarrow \quad c_1^x = \frac{f_u^x}{G^x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i) w^x(x_i)}{\sum_{j=1}^{N} w^x(x_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \frac{w^x(x_i)}{\sum_{j=1}^{N} w^x(x_j)}$$

d.h. wir erhalten $u_f^x(x) = c_1^x u_1(x) = c_1^x \cdot 1$

Shepard-Approximierende

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \underbrace{\frac{w(x_i, x)}{\sum_{j=1}^{N} w(x_j, x)}}_{=: a_i(x)}$$

Approximierende $\quad \underbrace{\sum_{j=1} \cdots}_{=: a_i(x)}$

Bemerkung: (1) $\sum_{i=1}^{N} a_i(x) = 1$, d.h. die a_i bilden eine Zerlegung der 1.

(2) Falls $f(x_i) \equiv f$, dann ist

$$u_f^*(x) = f,$$

d.h. die Shepard-Approximierende reproduziert Konstanten exakt.

Aufgabe 7.1: (a) Implementiere Shepard's Methode für $f(x) = 4x(1-x)$ (bzw. $f(x) = 4^s \prod_{j=1}^{s} x_j(1-x_j)$).

z.B. $w(x,y) = e^{-\varepsilon^2 \|x-y\|^2}$

$w(x,y) = \varphi_{s,k}(\varepsilon \|x-y\|)$

Fixiere zunächst $\varepsilon = 3$ („nichtstationär")
Plotte den Approximationsfehler (L^2 oder L^∞) in Abhängigkeit der Knotenzahl.