Workshop heute 14-18 im 02.04.011.

Satz 6.6: $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ beschränkt, $\phi \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$ strikt positiv definit, $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ mit Fülldistanz $h = h(\Omega, X)$. Dann gilt

$$\left(P_{\phi,X}(x)\right)^2 \leq C h^{2k} \max_{|\beta|=2k} \max_{w,z \in \Omega \cap B(x, c_2 h)} \left| D_z^\beta \phi(w,z) \right|$$

Beweis: Aus Lemma 6.3 wissen wir

$$\left(P_{\phi,X}(x)\right)^2 = Q(u^*(x)) \leq Q(u) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^N$$

$$(*) \qquad = \phi(x,x) - 2\sum_j u_j \phi(x,x_j) + \sum_{i,j} u_i u_j \phi(x_i,x_j)$$

Taylor-Entwicklung von $\phi(x,\cdot)$ in x liefert

$$\phi(x,y) = \sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta \phi(x,x)(y-x)^\beta + R(x,y)$$

wobei $R(x,y) = \sum_{|\beta|=2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta (x,\xi)(y-x)^\beta, \quad \xi \in [x,y]$.

Eingesetzt in $(*)$ erhalten wir

$$Q(u) = \phi(x,x) - 2\sum_j u_j \left[\sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta (x,x)(x_j - x)^\beta + R(x,x_j)\right]$$

$$+ \sum_{i,j} u_i u_j \left[\sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta (x_i,x_i)(x_j - x_i)^\beta + R(x_i,x_j)\right]$$

$$= \phi(x,x) - 2\sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta (x,x) \sum_j u_j \underbrace{(x_j - x)^\beta}_{=p(x_j)}$$

$$2\sum u_j R(x,x_j)$$

$$\ldots \sum_{|\beta|<2k} \ldots \sum_j \ldots = p(x_j)$$

wähle $u_j := \tilde{u}_j(x)$ $\;\;= 0$ f. $\beta \neq 0$

Anwendung von Lemma 6.5

$$- 2 \sum_j u_j R(x, x_j)$$

$$+ \sum_i u_i \sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta(x_i, x_i) \sum_j u_j (x_j - x_i)^\beta$$

$$+ \sum_{i,j} u_i u_j R(x_i, x_j)$$

wähle $u_j := \tilde{u}_j(x)$ $\;\;= (x - x_i)^\beta$

$$= \phi(x,x) - 2\phi(x,x) - 2 \sum_j \tilde{u}_j R(x, x_j)$$

$$+ \sum \tilde{u}_i \sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta(x_i, x_i)(x - x_i)^\beta$$

$$+ \sum_{i,j} \tilde{u}_i \tilde{u}_j R(x_i, x_j)$$

nutze, dass $\sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta(x_i, x_i)(x - x_i)^\beta = \phi(x_i, x) - R(x_i, x)$

$$= - \phi(x,x) - \sum_j \tilde{u}_j \left[2R(x, x_j) - \sum_i \tilde{u}_i R(x_i, x_j) \right]$$

$$+ \sum_i \tilde{u}_i \left[\underline{\phi(x_i, x)} - R(x_i, x) \right]$$

nutze Symmetrie des Kerns:

$$\phi(x_i, x) = \phi(x, x_i) = \sum_{|\beta|<2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta \phi(x, x)(x_i - x)^\beta + R(x, x_i)$$

und erneut Lemma 6.5

$$= -\sum_j \tilde{u}_j \left[R(x,x_j) + R(x_j,x) - \sum_i \tilde{u}_i R(x_i,x_j) \right]$$

Lemma 6.5 liefert zusätzlich $\sum_j |\tilde{u}_j| \leq c_1$.
Außerdem wissen wir, dass $\|x - x_j\| \leq c_2 h(X,\Omega)$ für ein j. ∎

Korollar 6.7: In Kombination mit Satz 6.2 erhalten wir also einen Approximationsfehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^k)$ für Kerne die C^{2k} sind.

Für C^∞-Kerne erhalten wir also Konvergenz beliebig hoher Ordnung. Konkret gilt folgender Satz:

Satz 6.8: $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ein Würfel, $\Phi = \varphi(\|\cdot\|_2)$ strikt positiv definit, $\psi = \varphi(\sqrt{\cdot})$ und $|\psi^{(\ell)}(r)| \leq M^\ell$ für alle $\ell \geq \ell_0$, $r \geq 0$ und eine Konstante $M > 0$.
Dann gibt es ein $c > 0$ so dass für jede Funktion $f \in N_\Phi$:

$$\|f - I_{f,X}\|_\infty \leq e^{\frac{c \log h}{h}} \|f\|_\Phi$$

Dies gilt insbesondere für den Gauß-Kern:

$\Phi(x) = e^{-\varepsilon^2 \|x\|_2^2}$, $\psi(r) = e^{-\varepsilon^2 r}$

$\Rightarrow \psi^{(\ell)}(r) = (-1)^\ell \varepsilon^{2\ell} e^{-\varepsilon^2 r}$, d.h. die Voraussetzungen sind erfüllt mit $M = \varepsilon^2$.

Für die Wendland-Funktionen $\varphi_{s,k}$ kann man weiter zeigen, dass weiter zeigen, dass

$$\|f - I_{f,X}\|_\infty \leq C h^{k+\frac{1}{2}} \|f\|_\phi$$

2.2.	3.2.	4.2.	5.2.	6.2	Klausur
1	2	1	3	2	
9.2.	10.2.	11.2.	12.2.	13.2	9.2.
1	1	1	1	1	14–15