Lagrange-Interpolierende

$$I_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\, u_j^*(x)$$

6.2 Eine allgemeine Fehlerabschätzung

Satz 6.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^s$, $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$, $\phi \in C(\Omega \times \Omega)$ strikt positiv definit, $f \in \mathcal{N}_\phi(\Omega)$ Interpolierende $I_{f,X}$. Dann gilt

$$|f(x) - I_{f,X}(x)| \leq \|f\|_\phi \, P_{\phi,X}(x),$$

wobei $P_{\phi,X}$ die Power-Funktion

$$P_{\phi,X} = \|\phi(\cdot,x) - I_{\phi(\cdot,x)}(x)\|_\phi .$$

Beweis: Da $f \in \mathcal{N}_\phi(\Omega)$, gilt $f(x) = (f, \phi(\cdot,x))_\phi$.

Also
$$I_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\, u_j^*(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} (f, \phi(\cdot,x_j))_\phi \, u_j^*(x)$$
$$= \Big(f, \sum_{j=1}^{N} \phi(\cdot,x_j)\, u_j^*(x)\Big)_\phi$$

Damit erhalten wir

$$|f(x) - I_{f,X}(x)| = \Big| (f, \phi(\cdot,x))_\phi - \Big(f, \sum_{j=1}^{N} \phi(\cdot,x_j)\, u_j^*(x)\Big)_\phi \Big|$$
$$= \Big| \Big(f, \phi(\cdot,x) - \sum_{j=1}^{N} \phi(\cdot,x_j)\, u_j^*(x)\Big)_\phi \Big|$$

$$\le \|f\|_\phi \underbrace{\| \underbrace{\phi(\cdot,x) - \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \phi(\cdot,x_j) u_j^*(x)}_{= I_{\phi(\cdot,x),X}} \|_\phi}_{= P_{\phi,X}(x)} \quad \blacksquare$$

6.3 Die Power-Funktion

$$\begin{aligned}
(P_{\phi,X}(x))^2 &= \Big(\phi(\cdot,x) - \sum_j \phi(\cdot,x_j) u_j^*(x),\ \phi(\cdot,x) - \sum_j \phi(\cdot,x_j) u_j^*(x)\Big)_\phi \\
&= (\phi(\cdot,x), \phi(\cdot,x))_\phi - 2\sum_j u_j^*(x) (\phi(\cdot,x), \phi(\cdot,x_j))_\phi \\
&\quad + \sum_{i,j} u_i^*(x) u_j^*(x) (\phi(\cdot,x_i), \phi(\cdot,x_j))_\phi \\
&= \phi(x,x) - 2\sum_j u_j^*(x)\phi(x,x_j) + \sum_{i,j} u_i^*(x) u_j^*(x)\phi(x_i,x_j)
\end{aligned}$$

D.h. mit der folgenden quadratischen Form:

$$\begin{aligned}
Q_x(u) &= \phi(x,x) - 2\sum_j u_j \phi(x,x_j) + \sum_{i,j} u_i u_j \phi(x_i,x_j) \quad , u \in \mathbb{R}^N \\
&= \phi(x,x) - 2u^T b(x) + u^T A u
\end{aligned}$$

(wobei $b(x) = [\phi(x,x_1), \dots, \phi(x,x_N)]^T$, $A = (\phi(x_i,x_j))_{i,j}$)
können wir die Power-Funktion auch darstellen als

$$(P_{\phi,X}(x))^2 = Q_x(u^*(x)), \quad (\text{wobei } u^*(x) = [u_1^*(x), \dots, u_N^*(x)]^T).$$

bzw., da $Au^*(x) = b(x)$ [Ü.], auch folgendermaßen

$$(P_{\phi,X}(x))^2 = \phi(x,x) - u^*(x)^T b(x)$$

$$= \phi(x,x) - u^*(x)^T A\, u^*(x)$$
$$= \phi(x,x) - b(x)^T A^{-1} b(x)$$

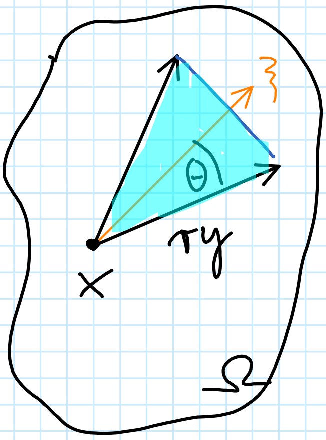
6.4 Fehlerabschätzungen in der Fülldistanz

Lemma 6.3: $\Omega \subset \mathbb{R}^s$, $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$, $\phi \in C(\Omega \times \Omega)$ strikt positiv definit. Dann

$$Q_x(u^*(x)) \le Q_x(u), \quad \text{for all } u \in \mathbb{R}^N.$$

Beweis: Übung.

Definition 6.4: Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ erfüllt eine Kegelbedingung im Inneren, falls es einen Winkel $\theta \in (0, \pi/2)$ und einen Radius $\tau > 0$ gibt, so dass es zu jedem Punkt $x \in \Omega$ einen Einheitsvektor $\xi \in \mathbb{R}^s$ gibt, so dass der Kegel



$$C = \{x + \lambda y \mid y \in \mathbb{R}^s, \|y\| = 1, y^T \xi \ge \cos\theta, \lambda \in [0, \tau]\}$$

in Ω enthalten ist.

Lemma 6.5: $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ beschränkt, die die Kegelbedingung im Inneren erfüllt; $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es $h_0 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, so dass für alle Knotenmengen $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ mit $h(X, \Omega) \le h_0$ und jedes $x \in \Omega$ Zahlen $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x), \dots, \tilde{u}_N = \tilde{u}_N(x)$ existieren, so dass

(1) $p(x) = \sum_{j=1}^{N} p(x_j)\, \tilde{u}_j(x)$ für alle Polynome

vom Grad $\leq \ell$;

(2) $\sum_j |\tilde{u}_j(x)| \leq c_1$;

(3) $\operatorname{supp} \tilde{u}_j(\cdot) \subset B(x_j, c_2 h(X, \Omega))$.

Satz 6.6: $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ beschränkt, $\phi \in C^{2k}(\Omega \times \Omega)$ strikt positiv definit, $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ mit Fülldistanz $h = h(\Omega, X)$. Dann gilt

$$P_{\phi,X}(x) \leq C h^k \max_{|\beta| = 2k} \; \max_{w,z \in \Omega \cap B(x, c_2 h)} \left| D_z^\beta \phi(w,z) \right|$$

Beweis: Aus Lemma 6.3 wissen wir

$$(P_{\phi,X}(x))^2 = Q(u^*(x)) \leq Q(u) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^N$$

$$(*) \qquad = \phi(x,x) - 2 \sum_j u_j \phi(x, x_j) + \sum_{i,j} u_i u_j \phi(x_i, x_j)$$

Taylor-Entwicklung von $\phi(x, \cdot)$ in x liefert

$$\phi(x,y) = \sum_{|\beta| < 2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta \phi(x,x)(y-x)^\beta + R(x,y)$$

wobei $R(x,y) = \sum_{|\beta| = 2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta (x, \xi)(y-x)^\beta, \quad \xi \in [x,y]$.

Eingesetzt in $(*)$ erhalten wir

$$Q(u) = \phi(x,x) - 2 \sum_j u_j \Big[\sum_{|\beta| < 2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta (x,x)(x_j - x)^\beta + R(x, x_j) \Big]$$

$$+ \sum_{i,j} u_i u_j \Big[\sum_{|\beta| < 2k} \frac{1}{\beta!} D_2^\beta (x_i, x_i)(x_j - x_i)^\beta + R(x_i, x_j) \Big]$$

Fortsetzung folgt ...