18.11.14

5. Native Räume

$\Omega \subset \mathbb{R}^s$

$\Phi: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ symmetrisch, strikt positiv definiter Kern

Betrachte

$$F_\Phi(\Omega) = \text{span}\{\Phi(\cdot, y) : y \in \Omega\}$$

Dies ist ein Vektorraum.

Definiere die Bilinearform für $f, g \in F_\Phi(\Omega)$:

$$(f,g)_\Phi = \left(\sum_{j=1}^N c_j \Phi(\cdot, x_j), \sum_{k=1}^M d_k \Phi(\cdot, x_k)\right)_\Phi$$

$$:= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M c_j d_k \Phi(x_j, x_k)$$

SATZ 5.1: $(\cdot,\cdot)_\Phi$ ist ein Skalarprodukt auf $F_\Phi(\Omega)$. $F_\Phi(\Omega)$ ist ein Prähilbertraum mit reproduzierendem Kern Φ.

Beweis: $(\cdot,\cdot)_\Phi$ ist symmetrisch und bilinear.

Für $f = \sum_{j=1}^N c_j \Phi(\cdot, x_j) \neq 0$ gilt

$(f,f)_\Phi = \sum_{j,k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j, x_k) > 0$, da

wir Φ als strikt positiv definit vorausgesetzt haben. Außerdem gilt

$(f, \Phi(\cdot, y))_\Phi = \sum^N c_j \Phi(x_j, y)$

$$(f,\phi(\cdot,y))_\phi = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi(x_j,y)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} c_j \phi(y,x_j) = f(y).$$

$\blacksquare$

Definition 5.2. Der *native Raum* $\mathcal{N}_\phi(\Omega)$ von ϕ ist der Abschluss von $F_\phi(\Omega)$ bzgl. der induzierten Norm $\|\cdot\|_\phi$.

$\mathcal{N}_\phi(\Omega)$ ist also ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern ϕ. Tatsächlich gilt folgendes: Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum von Funktionen $f:\Omega\to\mathbb{R}$ mit reproduzierendem Kern, dann $\mathcal{G}=\mathcal{N}_\phi(\Omega)$.

Beispiele: (1) $\phi(x,y)=\phi_{s,k}(\|x-y\|_2)$ (Wendland-Funktionen)

native Räume = Sobolev-Räume

$$W_2^m(\Omega)=\{f\in L^2(\Omega): D^\alpha f\in L^2(\Omega) \text{ für } |\alpha|\le m\}$$

mit $m=\frac{s}{2}+k+\frac{1}{2}$, es gilt (Sobolev-Einbettungssatz) $W_2^m(\Omega)\subset C(\Omega)$ $(\Omega\subset\mathbb{R}^s)$

(2) $\phi(x,y)=\exp(-\|x-y\|_2^2)$ (Gauß-Fktn.)

der native Raum enthält insbesondere

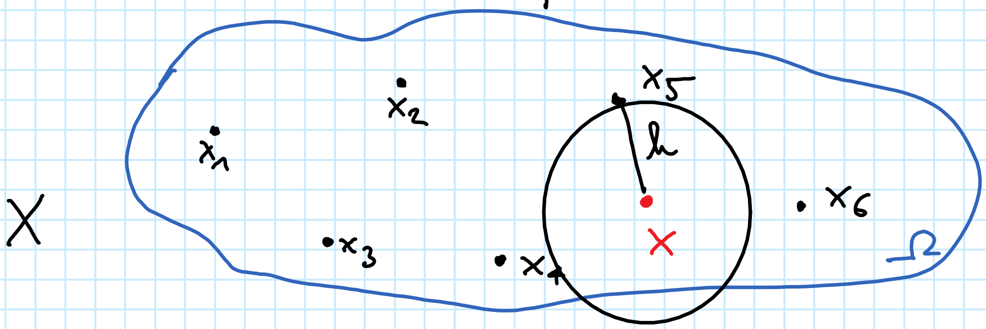
Funktionen, deren Fourier-Transformierte kompakt getragen ist (bandbeschränkt)

6. Fehlerabschätzungen in den nativen Räumen

$X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^s$

Fülldistanz von X in Ω:

$$h = h(X, \Omega) = \sup_{x \in \Omega} \min_{x_j \in X} \| x - x_j \|_2$$



Frage in diesem Kapitel: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, $I_{f,X} : \Omega \to \mathbb{R}$ Interpolierende auf X, wie verhält sich der Fehler

$$\| f - I_{f,X} \|$$

für $h \to 0$?

6.1 Kardinale Basisfunktionen

$\phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ strikt positiv definit, stetig

$A = (\phi(x_j, x_k))_{j,k}$ Interpolationsmatrix (invertierbar)

Betrachte die Lösungen $u^k \in \mathbb{R}^N$ der Aufgaben

$$Au^k = e_k \in \mathbb{R}^N \quad (k\text{-ter Einheitsvektor})$$

$k = 1, \dots, N.$

und definiere damit

$$u_k^* = \sum_{j=1}^{N} u_j^k \phi(\cdot, x_j)$$

Eigenschaft: $$u_k^*(x_i) = \sum_{j=1}^{N} u_j^k \phi(x_i, x_j)$$

$$= A_{i,*} u^k$$

$$= \delta_{ik}$$

d.h. diese Funktionen u_k^*, $k = 1, \dots, N$, bilden eine nodale Basis / Lagrange-Basis, wir nennen sie kardinale Basisfunktionen.

Aufgabe 6.1: $\Omega = [0,1]^2$, $X = h\mathbb{Z}^2 \cap \Omega$, $h = \frac{1}{8}$

$$\phi(x,y) = \exp\left(-\varepsilon^2 \|x-y\|_2^2\right), \quad \varepsilon = 5,$$

Zeichne die kardinalen Basisfunktionen.