4. Hilberträume mit reproduzierendem Kern

$\Omega \subset \mathbb{R}^s$, $\mathcal{F}$ Hilbertraum von Funktionen $f: \Omega \to \mathbb{R}$ mit innerem Produkt $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{F}}$

Definition 4.1: Eine Funktion $\Phi: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ heißt reproduzierender Kern von $\mathcal{F}$, falls

(1) $\Phi(\cdot, y) \in \mathcal{F}$ für alle $y \in \Omega$,

(2) $f(y) = (f, \Phi(\cdot, y))_{\mathcal{F}}$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und $y \in \Omega$.

Bemerkung: (1) bedeutet natürlich insbesondere, dass alle Funktionen der Form

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \Phi(\cdot, y_i), \quad y_i \in \Omega$$

in $\mathcal{F}$ enthalten sind.

LEMMA 4.2: Der reproduzierende Kern eines Hilbertraums $\mathcal{F}$ ist eindeutig.

Beweis: Angenommen, $\mathcal{F}$ hat die reproduzierenden Kerne Φ_1 und Φ_2. Die Eigenschaft (2) liefert zunächst

$$(f, \Phi_1(\cdot, y) - \Phi_2(\cdot, y)) = f(y) - f(y) = 0. \quad \forall f, y!$$

Wähle jetzt speziell $f = \Phi_1(\cdot, y) - \Phi_2(\cdot, y)$, dann gilt also

$$\|\Phi_1(\cdot, y) - \Phi_2(\cdot, y)\|_{\mathcal{F}}^2 = (\Phi_1(\cdot, y) - \Phi_2(\cdot, y), \Phi_1(\cdot, y) - \Phi_2(\cdot, y))_{\mathcal{F}}$$

$$\|\phi_1(\cdot,y)-\phi_2(\cdot,y)\|_{\mathcal{F}} = \big(\phi_1(\cdot,y)-\phi_2(\cdot,y), \phi_1(\cdot,y)-\phi_2(\cdot,y)\big)_{\mathcal{F}}$$
$$= 0$$
$\Rightarrow \phi_1(\cdot,y) = \phi_2(\cdot,y)$ für alle y. ∎

SATZ 4.3: Es sind äquivalent

(1) $\mathcal{F}$ besitzt einen reproduzierenden Kern.

(2) Die Punktfunktionale $\delta_y : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $y \in \Omega$, sind stetig, i.e. $\delta_y \in \mathcal{F}^*$.

$\mathcal{F}^*$ = Dualraum von $\mathcal{F} = \{ f^* : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \mid f^* \text{ linear, stetig} \}$

Beweis: Angenommen, $\mathcal{F}$ hat einen reproduzierenden Kern ϕ. Gemäß (2) bedeutet das, dass

$\delta_y(f) = f(y) = (f, \phi(\cdot,y))_{\mathcal{F}}$, also mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung Stetigkeit von δ_y.

Angenommen $\delta_y \in \mathcal{F}^*$. Aufgrund des Rieszschen Darstellungssatzes finden wir ein $\phi_y \in \mathcal{F}$, so dass $\delta_y(f) = (f, \phi_y)_{\mathcal{F}}$. Dann ist

$\phi(x,y) := \phi_y(x)$ ein reproduzierender Kern. ∎

SATZ 4.4: Angenommen, $\mathcal{F}$ besitzt einen reproduzierenden Kern ϕ, dann

(1) $\phi(x,y) = (\phi(\cdot,x), \phi(\cdot,y))_{\mathcal{F}} = (\delta_x, \delta_y)_{\mathcal{F}^*}$

(2) $\phi(x,y) = \phi(y,x)$

(3) Falls $(f_n) \subset \mathcal{F}$ stark konvergiert, dann auch punktweise.

Beweis: Sei $F: \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}$ der Isomorphismus aus dem Rieszschen Darstellungssatz, d.h.

$f^*(f) = (f, F(f^*))_{\mathcal{F}}$. Für $f^* = \delta_y$ bedeutet das $f(y) = \delta_y(f) = (f, F(\delta_y))_{\mathcal{F}}$, d.h.

$F(\delta_y) = \Phi(\cdot, y)$, d.h.

$$(\delta_x, \delta_y)_{\mathcal{F}^*} = (F(\delta_x), F(\delta_y))_{\mathcal{F}} = (\Phi(\cdot, x), \Phi(\cdot, y)).$$

Außerdem gilt

$$\Phi(x,y) = \delta_x(\Phi(\cdot, y)) \overset{(2)}{=} (\Phi(\cdot, y), \Phi(\cdot, x))_{\mathcal{F}}$$

und wegen der Symmetrie des Skalarprodukts folgt (1) und (2).

Für (3): Es gelte $\|f_n - f\|_{\mathcal{F}} \to 0$, dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |(f_n - f, \Phi(\cdot, x))_{\mathcal{F}}| \le \|f_n - f\|_{\mathcal{F}} \, \|\Phi(\cdot, x)\|_{\mathcal{F}}. \quad \blacksquare$$

Definition 4.5: Ein stetiger Kern $\Phi: \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **positiv definit**, falls für alle endlichen Teilmengen $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ und alle $c \in \mathbb{C}^N$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^{N} c_j \overline{c_k} \, \Phi(x_j, x_k) \ge 0.$$

Er heißt strikt positiv definit, wenn die quadratische Form nur für $c=0$ verschwindet.

Satz 4.6: Angenommen, $\mathcal{F}$ hat einen reproduzierenden Kern ϕ. Dann ist ϕ positiv definit. Außerdem ist ϕ genau dann strikt positiv definit, wenn die Punktfunktionale linear unabhängig sind in $\mathcal{F}^*$.

Beweis: Da ϕ reellwertig und symmetrisch ist, können wir uns auf $c \in \mathbb{R}^N$ beschränken:

$$\sum_{j,k=1}^{N} c_j c_k \phi(x_j, x_k) = \sum_{j,k=1}^{N} c_j c_k (\delta_{x_j}, \delta_{x_k})_{\mathcal{F}^*}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \delta_{x_j}, \sum_{k=1}^{N} c_k \delta_{x_k} \right)_{\mathcal{F}^*}$$

$$= \left\| \sum c_j \delta_{x_j} \right\|_{\mathcal{F}^*}^2 \geq 0$$

und $= 0 \iff \sum_{j=1}^{N} c_j \delta_{x_j} = 0$ ∎

Definition 4.7: Sei $\mathcal{T}$ eine Gruppe von Transformationen $T: \Omega \to \Omega$. Wir nennen $\mathcal{F}$ invariant unter dieser Gruppe, falls

(1) $f \circ T \in \mathcal{F}$ $\qquad f \in \mathcal{F}, T \in \mathcal{T}$

(2) $(f \circ T, g \circ T)_{\mathcal{F}} = (f, g)_{\mathcal{F}}$ $\qquad f, g \in \mathcal{F}, T \in \mathcal{T}$.

Beispiel: $\Omega =$ Einheitskreis

$\mathcal{T} = \{$Drehungen um den Ursprung$\}$

Lemma 4.8: $\mathcal{F}$ Hilbertraum mit repr. Kern ϕ, invariant unter $\mathcal{T}$, dann

$$\phi(Tx, Ty) = \phi(x,y)$$

Beweis: Wir haben $f(y) = (f, \phi(\cdot, y))_{\mathcal{F}}$, aber auch

$$f(y) = f(T^{-1}(Ty)) = (f \circ T^{-1})(Ty)$$

$\downarrow$ (2) aus Def 4.1

$$= (f \circ T^{-1}, \phi(\cdot, Ty))_{\mathcal{F}}$$

$\downarrow$ (2) aus Def 4.6.

$$= (f, \phi(T\cdot, Ty))_{\mathcal{F}}$$

Die Aussage folgt, da der Kern eindeutig ist. $\blacksquare$

Beispiel: Radiale Basisfunktionen als E^s-invariante Kerne

$\Omega = \mathbb{R}^s$

$\mathcal{T} = E^s$ = euklidische Gruppe auf dem $\mathbb{R}^s$
= Translationen, Drehungen und Spiegelungen

- T Translation, d.h. $Ty = x - y$ für ein $x \in \mathbb{R}^s$

  $\rightsquigarrow \phi(x,y) = \phi(Tx, Ty) = \phi(0, x-y) =: \phi_0(x-y)$

- für $x, y \in \mathbb{R}^s$ wähle Drehung A so, dass

$$A(x-y) = \|x-y\|_2 e_1$$

$$\rightsquigarrow \phi(x,y) = \phi(Ax, Ay) = \phi(0, A(x-y))$$
$$= \phi_0(A(x-y))$$
$$= \phi_0(\|x-y\| e_1)$$
$$=: \varphi(\|x-y\|),$$

d.h. der Kern ist radial.