3.1 Interpolation mit kompakt getragenen radialen Basisfunktionen

Grundfunktion $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} \varphi = [0,1]$

$\leadsto$ $\varphi_\varepsilon(r) = \varphi(\varepsilon r)$ hat Träger auf $[0, \frac{1}{\varepsilon}]$

$\leadsto$ Abstandsmatrix $D = \left(\varphi_\varepsilon(\|x_i - x_j\|) \right)_{ij}$

ist dünn besetzt, falls ε hinreichend groß ist

$\leadsto$ bei der Berechnung von D würden wir uns gerne die Berechnung der Nulleinträge sparen

$\leadsto$ das gelingt (z.B.) mit der folgenden Datenstruktur:

kd-Baum

Wir müssen berechnen

(1) welche Zentren / Knoten x_j liegen im Träger der Basisfunktion zu einem festen Zentrum x_i („range query")

(2) in welchen Trägern liegt ein gegebener (beliebiger) Punkt $x \in \Omega$.

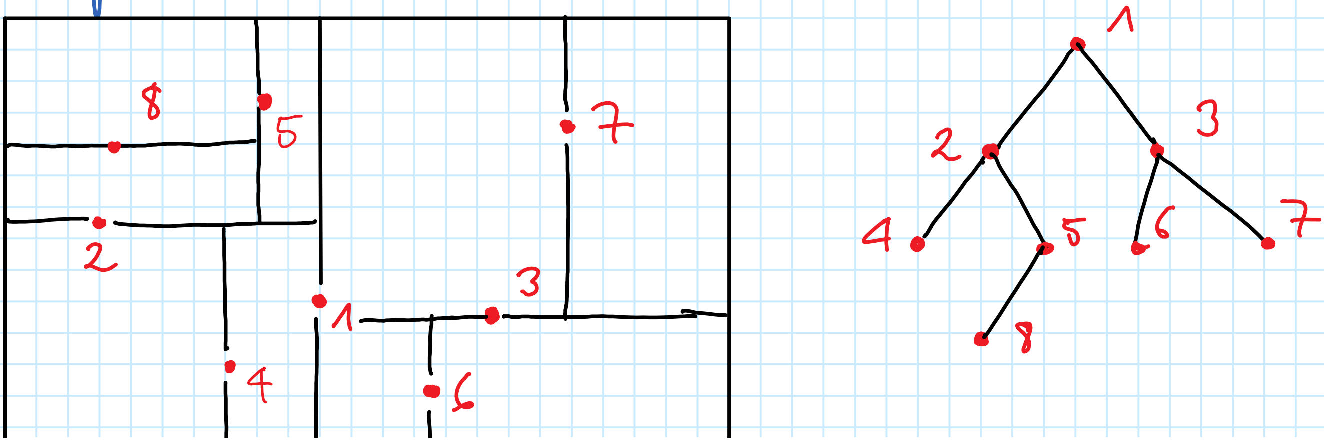
Gegeben sind die Zentren $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^s$.
Wir konstruieren einen binären Baum (Baum, in dem jeder Knoten maximal 3 Kanten hat) mit den folgenden Eigenschaften:

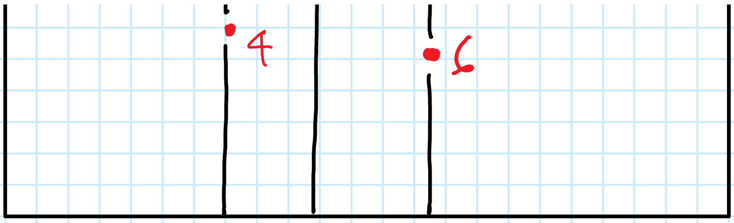
(a) jeder Knoten ist ein Zentrum $x_i \in X$ zugeordnet und eine Ebene, die parallel zu den Koordinatenachsen und durch x_i verläuft

(b) diese Ebenen teilen die Knoten unterhalb (d.h. die Kinder, Enkel, ...) des zugeordneten Knoten in zwei ungefähr gleich große Teile

(c) die jeweils geteilte Koordinatenachse variiert zyklisch beim Hinabsteigen im Baum

Beispiel:





Eigenschaften:

- die Tiefe ist ungefähr $\log_2 N$
- die Konstruktion des Baumes erfordert $O(N \log N)$
- eine „range query" erfordert $O(\cancel{\log N})$ $\sqrt{N}$ Zeit (Tiefensuche)

vgl. http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides5.pdf

Aufgabe 3.9: (a) Interpoliere $f(x) = 4x(1-x)$ auf $[0,1]$ mit Wendlands $\varphi_{3,2}$ sowohl mit der vollbesetzten als auch mit der dünnbesetzten Version der Abstandsmatrix.

(b) Vergleiche die Rechenzeit für verschiedene N und ε.