2. Positiv definite Funktionen

grundlegende Frage: Unter welchen Bedingungen an die Basisfunktionen B_k ist die Interpolationsmatrix regulär?

$\rightsquigarrow$ keine allgemeine Antwort

stattdessen: Wie können wir sicherstellen, dass D positiv (semi) definit, d.h.

$$c^T D \bar{c} > 0 \quad (\geq 0)$$

für alle $c \in \mathbb{C}^s \setminus \{0\}$.

Definition 2.1: Eine stetige Funktion $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls die Matrix

$$D = \left(\phi(x_j - x_k)\right)_{j,k}$$

positiv semi-definit ist für jede Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^s$. Falls D sogar positiv definit ist, heißt ϕ strikt positiv definit.

Bemerkung: Verwirrende Bezeichnung hat historische Gründe ...

Beispiel: Die Funktion $\phi(x) = e^{ix^Ty}$ für $y \in \mathbb{R}^s$ fest ist positiv definit:

$$\phi(x_j - x_k) = e^{i(x_j - x_k)^T y}$$
$$= e^{ix_j^T y}\, \overline{e^{ix_k^T y}},$$

so dass

$$c^T D \overline{c} = \sum_{j,k=1}^{N} c_j \overline{c_k}\, \phi(x_j - x_k)$$
$$= \sum_{j,k=1}^{N} c_j \overline{c_k}\, e^{ix_j^T y}\, \overline{e^{ix_k^T y}}$$
$$= \sum_{j=1}^{N} c_j e^{ix_j^T y} \cdot \overline{\sum_{k=1}^{N} c_k e^{ix_k^T y}}$$
$$= \left| \sum c_j e^{ix_j^T y} \right|^2 \geq 0$$

für alle $c \in \mathbb{C}^N$.

Satz 2.2: Sei $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ positiv definit. Dann hat ϕ die folgenden Eigenschaften:

(1) $\phi(0) \geq 0$

(2) $\phi(-x) = \overline{\phi(x)}$

(3) $|\phi(x)| \leq \phi(0)$

(4) Falls $\phi(0) = 0$, dann $\phi \equiv 0$.

(5) Linearkombinationen positiv definiter Funktionen mit nicht-negativen Koeffizienten sind positiv definit.

(6) Ein Produkt von (strikt) positiv definiten Funktionen ist (strikt) positiv definit.

Beweis: (1) $\phi(0) = \phi(x_1 - x_1) = D_{11}$

$$= e_1^T D e_1 \geq 0$$

(2) $X = \{0, x\}$, $c_1 = 1$, $c_2 = c$

$$c^T D \bar{c} = (1 \ \ c) \begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(-x) \\ \phi(x) & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix}$$

$$= (1 + |c|^2)\phi(0) + c\phi(x) + \bar{c}\phi(-x)$$

$$\geq 0 \quad \text{für jedes } c \in \mathbb{C}.$$

Wir wählen speziell $c = 1$ und $c = i$, dann ist sowohl $\phi(x) + \phi(-x)$ reell $(c = 1)$, als auch $i(\phi(x) - \overline{\phi(-x)})$ $(c = i)$

$\Rightarrow \phi(-x) = \overline{\phi(x)}$.

(3) $X = \{0, x\}$, $c_1 = |\phi(x)|$, $c_2 = \overline{-\phi(x)}$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c^T D \bar{c} &= 2\phi(0)|\phi(x)|^2 \\ &\quad - \phi(-x)\phi(x)|\phi(x)| \\ &\quad - \phi^2(x)|\phi(x)| \geq 0 \end{aligned}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} 2\phi(0)|\phi(x)|^2 - 2|\phi(x)|^3 \geq 0$$

(4) Folgt direkt aus (3).

(5) Folgt direkt aus der Def.

(6) siehe [Wendland, 2005].

$\blacksquare$

Satz 2.3 [Bochner, 1932/33]: Eine stetige Funktion $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{C}$ ist positiv definit genau dann, wenn es ein endliches nicht-negatives Borel-Maß μ gibt, so dass

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int e^{-ix^T y} \, d\mu(y)$$

Beweis der Notwendigkeit: Angenommen, ϕ hat diese Form. Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^s$ und $c \in \mathbb{C}^N$ beliebig:

$$c^T D \bar{c} = \sum_{j,k=1}^{N} c_j \bar{c}_k \phi(x_j - x_k)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{N} c_j \bar{c}_k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int e^{-i(x_j - x_k)^T y} \, d\mu(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int \sum_{j=1}^{N} c_j e^{-i x_j^T y} \overline{\sum_{k=1}^{N} c_k e^{-i x_k^T y}} \, d\mu(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{-i x_j^T y} \right|^2 d\mu(y) \geq 0,$$

da μ nicht-negativ ist.

$\blacksquare$