Mengenorientierte Numerik – 8–

Definition 5.11: Für ein W-Maß μ definieren wir den Frobenius-Perron-Operator $P : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$

$$(P\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

Bemerkung: (a) Invariante Maße sind Fixpunkte von P.

(b) Eine alternative Definition auf L^1 lautet:

$$(Ph)(x) = \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}([0,x])} h(s)\, ds.$$

Definition 5.12: Eine Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise C^2, falls es eine Unterteilung $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_p = 1$ gibt, so dass für jedes $j \in \{1, \dots, p\}$ die Restriktion $f|_{(b_{j-1}, b_j)}$ eine C^2-Funktion ist, die auf $[b_{j-1}, b_j]$ in eine C^2-Funktion fortgesetzt werden kann.

Wir betrachten jetzt eine Abbildung $f : [0,1] \circlearrowleft$ und eine Partition des Intervalls $[0,1]$ in n gleichgroße Teilintervalle $I_1, \dots, I_n$, $m(I_j) = \frac{1}{n}$. Es sei

$$p_{ij} = \frac{m(I_i \cap f^{-1}(I_j))}{m(I_i)}$$

„sparse“ [dünnbesetzte Matrix!]

der Anteil von I_i, der durch f nach I_j abgebildet wird. Weiterhin sei $\Delta_n = \mathrm{span}\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$, wobei χ_i die charakteristische Funktion der Menge I_i bezeichnet.

Wir definieren den linearen Operator $P_n : \Delta_n \to \Delta_n$ durch

$$P_n \chi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \chi_j .$$

Vermutung (Ulam, 1960): Die Folge $(h_n)_n$ von Fixpunkten von P_n konvergiert gegen einen Fixpunkt von P.

SATZ 5.13 (Li, 1973): Sei $f : [0,1] \circlearrowleft$ stückweise C^2 mit

$$M = \inf |f'| > 2.$$

Angenommen, $P : L^1 \to L^1$ hat einen eindeutigen Fixpunkt. Dann hat P_n einen Fixpunkt h_n in Δ_n mit $\|h_n\| = 1$ und die Folge $(h_n)_n$ konvergiert in L^1 gegen den Fixpunkt von P.

Im folgenden: Beweis von Satz 5.13

LEMMA 5.14: Es sei $\Delta_n^1 = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \chi_i ,\ a_i \geq 0 ,\ \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}$

Dann gilt $P_n(\Delta_n^1) \subset \Delta_n^1$.

Beweis: Sei $h \in \Delta_n^1$, $h = \sum_{i=1}^n a_i \chi_i$. Dann gilt

$$P_n h = P_n \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i P_n \chi_i = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \chi_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i p_{ij} \right)} \chi_j .$$

Nun gilt

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{m(I_i \cap f^{-1}(I_j))}{m(I_i)} = 1$$

Also

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i p_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \text{, also } P_n h \in \Delta_n^1 . \blacksquare$$

Da Δ_n^1 kompakt und konvex ist, existiert nach dem Brouwer'schen Fixpunktsatz ein Punkt $g_n \in \Delta_n^1$ mit $P_n g_n = g_n$. Wir setzen $h_n = n g_n$, dann gilt $h_n \in \Delta_n$ $\|h_n\| = 1$.

<u>Definition 5.15:</u> Für $h \in L^1$ definieren wir die Projektion $Q_n : L^1 \to \Delta_n$ durch

$$Q_n h = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} h(s)\, ds$$

<u>LEMMA 5.16:</u> Für $h \in L^1$ konvergiert $Q_n h$ gegen h in L^1 für $n \to \infty$.

<u>Beweis:</u> Da $h \in L^1$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion g mit $\|h - g\| < \varepsilon/3$. g ist auf dem Kompaktum $[0,1]$ gleichmäßig stetig, wir können also N so groß wählen, dass $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $x_1, x_2 \in I_i$, $i = 1, \dots, n$ für $n > N$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{I_i} |Q_n g(s) - g(s)|\, ds &= \int_{I_i} \left| \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} g(s')\, ds' - g(s) \right| ds \\
&\le \int_{I_i} \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} |g(s') - g(s)|\, ds'\, ds \\
&\le m(I_i) \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\|Q_n g - g\| = \int_0^1 |Q_n g - g|\, dm &= \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} |Q_n g - g|\, dm \\
&< \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt für $h \ge 0$

$$\int_0^1 Q_n h \, dm = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} h(s)\, ds \right) \chi_i(s')\, ds'$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_{I_i} h(s)\, ds = \int_0^1 h \, dm$$

und damit $\|Q_n\| = 1$. Zusammen ergibt sich

$$\|Q_n h - h\| \leq \|Q_n h - Q_n g\| + \|Q_n g - g\| + \|g - h\|$$
$$\leq \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

LEMMA 5.17: Für $h \in \Delta_n$ gilt $P_n h = Q_n P h$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $P_n \chi_i = Q_n P \chi_i$, $i = 1, \dots, n$

$$Q_n(P\chi_i) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} \left(\frac{d}{dx} \int_{f^{-1}([0,x])} \chi_i(s)\, ds \right) dx \right] \chi_j$$
$$= \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{m(I_j)} \int_{f^{-1}(I_j)} \chi_i(s)\, ds \right] \chi_j$$
$$= \sum_{j=1}^n \frac{m(I_i \cap f^{-1}(I_j))}{m(I_j)} \chi_j = \sum_{j=1}^n p_{ij} \chi_j = P_n \chi_i$$
$$\blacksquare$$

Aufgrund der Lemmata 5.16 und 5.17 gilt damit

LEMMA 5.18: Für $h \in A_n$ konvergiert die Folge $P_n h$ gegen Ph in L^1 für $n \to \infty$