Satz 5.6: (Poincaréscher Rückkehrsatz)
Es sei $f: X \to X$ eine messbare Abbildung zu dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und μ sei f-invariant. Zu $A \in \mathcal{A}$ sei $A_0 \subset A$ die Menge aller Punkte für die $f^j(x) \in A$ für unendlich viele j. Dann ist

$$\boxed{\mu(A_0) = \mu(A).}$$

Beweis: Sei $C_n = \{x \in A \mid f^j(x) \notin A \text{ für alle } j \geq n\}$.
Dann
$$A_0 = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Wir zeigen $C_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(C_n) = 0$ für alle n.
Zunächst ist
$$C_n = A \setminus \bigcup_{j \geq n} f^{-j}(A)$$

also gilt $C_n \in \mathcal{A}$. Weiter ist
$$C_n \subset \bigcup_{j \geq 0} f^{-j}(A) \setminus \bigcup_{j \geq n} f^{-j}(A)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \mu(C_n) \leq \mu\Big(\bigcup_{j \geq 0} f^{-j}(A)\Big) - \mu\Big(\bigcup_{j \geq n} f^{-j}(A)\Big) \quad (*)$$

Da μ invariant ist, gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{j \geq n} f^{-j}(A)\Big) = \mu\Big(f^{-n}\Big(\bigcup_{j \geq 0} f^{-j}(A)\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j \geq 0} f^{-j}(A)\Big)$$

und mit $(*)$ $\mu(C_n) = 0$. ∎

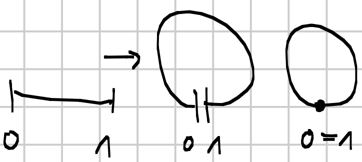
Definition 5.7: Ein invariantes Maß μ heißt ergodisch, falls jede invariante Menge das Maß 0 oder 1 besitzt:

$$f^{-1}(B) = B \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) \in \{0,1\}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Beispiel: (a) Es sei $f: X \to X$ die Identität. Dann ist ein Maß μ ergodisch genau dann, wenn alle $B \in \mathcal{B}$ das Maß 0 oder 1 besitzen.

(b) [Satz 5.8: X kompakter metrischer Raum und $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra und μ ist W-Maß mit $\mu(B) > 0$ für alle offenen $B \neq \emptyset$ und μ ergodisch, $f: X \to X$ stetig

$$\mu\left(\left\{x \in X : \{f^k(x)\}_{k=0}^{\infty} \text{ dicht in } X\right\}\right) = 1.]$$



Es sei $f: S^1 \to S^1$, $f(x) = x + \vartheta$, μ sei das Haar-Maß auf S^1.
Dann ist μ ergodisch genau dann, wenn ϑ irrational ist.

"Lebesgue-Maß auf [0,1]"

Lemma 5.9: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) μ ist invariantes Maß

(ii) $$\int \varphi \circ f \, d\mu = \int \varphi \, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): wähle $\varphi = \chi_B$, dann ist

$$\mu(B) = \int \chi_B \, d\mu = \int \chi_B \circ f \, d\mu = \int \chi_{f^{-1}(B)} \, d\mu = \mu(f^{-1}(B)).$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei μ invariant, dann gilt für $B \in \mathcal{B}$

$$\int \chi_B \circ f \, d\mu = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(B) = \int \chi_B \, d\mu$$

(jetzt approximiere ...) $\boxtimes$

Satz 5.10 (Birkhoffsches Ergodentheorem, 1931): Es sei $f: X \to X$ eine meßbare Abbildung auf dem Maßraum $(X, \mathcal{B}, \mu)$ und μ ein ergodisches Maß. Dann gilt für μ-fast alle $x \in X$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int_X \varphi \, d\mu}$$

zeitliches Mittel = örtliches Mittel

für alle $\varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Motivation: Mit welcher Häufigkeit liegen die Punkte eines Orbits $\{f^j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ in einer gegebenen Menge B?

Wähle $\varphi = \chi_B$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_B(f^j(x)) = \mu(B)$$

Anderes Beispiel: Für fast alle Zahlen $0 \leq x \leq 1$ (Lebesgue-Maß) ist die Durchschnittsanzahl der Nullen in der Dezimaldarstellung $0.x_1x_2\ldots$ gleich $\frac{1}{10}$. Die Zahlen heissen normale Zahlen.

Beweis: Es sei $f: [0,1) \to [0,1)$ die durch

$$f(x) = 10x \mod 1.$$

Das Lebesgue-Maß ist invariant und ergodisch.
Sei $B = [0, \frac{1}{10})$, dann ist $f^i(x) \in B \iff x_{i+1} = 0$,

Mit dem Ergodentheorem folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_B(f^j(x)) = \int \chi_B\,d\mu = \mu(B) = \frac{1}{10}.$$

für Lebesgue-fast alle x.

<u>Weiteres Beispiel:</u> $f: X\to X$, $f(p)=p$ asymptotisch stabiler Fixpunkt (d.h. für alle y aus einer Umgebung von p gilt $f^j(y)\to p$ für $j\to\infty$).

Invariantes Maß: $\delta_p(A) = \begin{cases}1, & p\in A\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

„Dirac-Maß" in p, ist ergodisch.

mit dem Ergodentheorem folgt,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(y)) = \int\varphi\, d\delta_p = \varphi(p)$$

für δ_p-f.a. y, d.h. nur für $y = p$!!!