Mengenorientierte Numerik – 4 –

Notiztitel 15.11.2005

<u>Definition 2.7:</u> Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir die

lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit

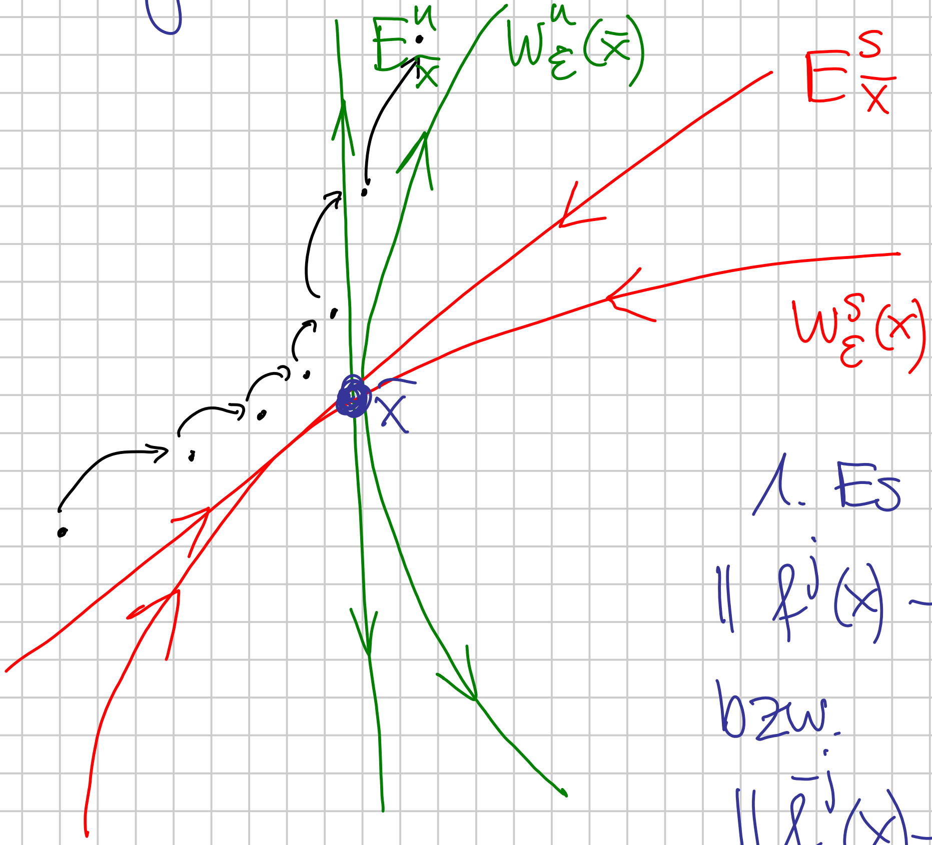
$$W^s_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|f^j(x) - f^j(y)\| \to 0 \text{ f. } j \to \infty \text{ und } \|f^j(x) - f^j(y)\| \leq \varepsilon \text{ für } j \geq 0 \}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{ \text{———} \text{ " } \text{———} \text{ f. } j \to -\infty \text{ —— " —— } j \leq 0 \}$$

Als nachträgliche Rechtfertigung für den Begriff Mannigfaltigkeit.

<u>SATZ 2.8</u> (Satz von der stabilen Mannigfaltigkeit)

Es sei A eine hyperbolische abgeschlossene Menge für f. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für jeden Punkt $x \in A$ $W^s_\varepsilon(x)$ und $W^u_\varepsilon(x)$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ mit der gleichen Dimension wie E^s_x und E^u_x sind. Der Tangential-



raum von $W^s_\varepsilon(x)$ bzw. $W^u_\varepsilon(x)$ in x ist E^s_x bzw. E^u_x. Darüberhinaus besitzen $W^s_\varepsilon(x)$ und $W^u_\varepsilon(x)$ folgende Eigenschaften:

1. Es gibt $C>0$, so dass

$$\| f^j(x) - f^j(y) \| \leq C\lambda^j \|x-y\| \quad \forall y \in W^s_\varepsilon(x),\ j \geq 0$$

bzw.

$$\| f^{-j}(x) - f^{-j}(y) \| \leq C\lambda^j \|x-y\| \quad \forall y \in W^u_\varepsilon(x),\ j \geq 0.$$

mit dem λ aus Def. 2.6.

2. Die lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit sind

gegeben durch

$$W^s_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \| f^j(x) - f^j(y) \| \le \varepsilon \quad \forall j \ge 0 \}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \| f^j(x) - f^j(y) \| \le \varepsilon \quad \forall j \le 0 \}$$

Definition 2.9 Die globale stabile und instabile Mfkt. sind definiert durch

$$W^s(x) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}\left(W^s_\varepsilon(x)\right)$$

$$W^u(x) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{j}\left(W^u_\varepsilon(x)\right).$$

Proposition 2.10: Es sei A eine attraktive kompakte hyperbolische Menge. Dann gibt es eine Umgebung U von A, so dass jeder Punkt in U in der stabilen Mannigfaltigkeit eines Punktes in A enthalten ist.

Beweis: Hirsch, Pugh, Palis, Shub: Neighborhoods of hyperbolic sets. Inven. Math., 9, 121, 1969–70.

Im folgenden werden wir uns immer in dieser Umgebung „aufhalten".
Für eine attraktive kompakte hyperbolische Menge und $\tau > 0$ definieren wir

$$U_\tau(A) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in A \text{ st. } y \in W^s(x) \text{ und } \|x - y\| < \tau \}$$

SATZ 2.11 (Konvergenzgeschwindigkeit des Unterteilungsalgorithmus).
Es sei A_Q der globale Attraktor des Diffeomorphismus f^q relativ zu der abgeschlossenen Menge Q. A_Q sei eine attraktive kompakte hyperbolische Menge. Es sei $\rho \geq 1$ eine Konstante, so dass für jede kompakte Umgebung $\tilde{Q}$ von A_Q gilt

$$h(A_Q, \tilde{Q}) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \tilde{Q} \subset U_{\rho\delta}(A_Q). \qquad (*)$$

Weiterhin gelte $\mathcal{B}_0 = \{Q\}$. Die Überdeckungen, Q_k, die im Unterteilungsalgorithmus erzeugt werden, erfüllen dann

$$h(A_Q, Q_k) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{B}_k)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k)$$

wobei

$$\alpha = \frac{C\lambda^q \rho}{\Theta_{min}}$$

und C und λ die charakteristischen Konstanten der hyp. Menge A_Q sind.

<u>Beweis</u>: Es sei $\mu_k = \operatorname{diam}(\mathcal{B}_k)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^k)$. Wir weisen $h(A_Q, Q_k) \leq \mu_k$ durch Induktion nach. <u>$k=0$</u>: klar, da $\mathcal{B}_0 = \{Q\}$ und $A_Q \subset Q$. Angenommen, $h(A_Q, Q_{k-1}) \leq \mu_{k-1}$ für ein $k > 0$. Dann folgt aus $(*)$, dass

$$Q_{k-1} \subset U_{\rho\mu_{k-1}}(A_Q).$$

Es gibt also zu jedem $y \in Q_{k-1}$ einen Punkt $x \in A_Q$, so dass $y \in W^s(x)$ und $\|y-x\| \le \rho\mu_{k-1}$. Nach dem Satz über die stabile Mannigfaltigkeit gilt nun

$$\|f^q(x) - f^q(y)\| \le C\lambda^q \rho\mu_{k-1}$$

Da $f^q(x) \in A_Q$ (da $W^u(x) \subset A_Q \ \forall x \in A_Q$), folgt

$$d(f^q(y), A_Q) \le C\lambda^q \rho\mu_{k-1} \qquad \forall y \in Q_{k-1}.$$

Mit Lemma 2.5 folgt nun

$$\begin{aligned} h(A_Q, Q_k) &\le \operatorname{diam}(B_k) + C\lambda^q \rho\mu_{k-1} \\ &= \operatorname{diam}(B_k) + \alpha\,\theta_{min}\,\mu_{k-1} \\ &= \operatorname{diam}(B_k) + \alpha\,\theta_{min}\operatorname{diam}(B_{k-1})(1+\alpha+\dots\alpha^{k-1}) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion des Unterteilungsschrittes gilt

$$\theta_{min}\operatorname{diam}(B_{k-1}) \le \operatorname{diam}(B_k)$$

Also folgt $h(A_Q, Q_k) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{B}_k)(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^k) = \mu_k$. $\square$

<u>Korollar 2.12</u>: Falls die Iterationsanzahl q so gewählt ist, dass

$$\alpha = \frac{C\lambda^q p}{\Theta_{min}} < 1,$$

dann gilt

$$h(A_Q, Q_k) \leq \frac{1}{1-\alpha} \operatorname{diam}(\mathcal{B}_k).$$

<u>Beispiel</u>:

$$f(x) = \beta x$$

mit $\beta = 0.5 + \varepsilon$ (ε hinreichend klein). Wir beginnen wieder mit $\mathcal{B}_0 = \{[-1,1]\}$ und konstruieren $\hat{\mathcal{B}}_k$ durch Bisektion der Intervalle in $\mathcal{B}_{k-1}$. Wir haben also $\lambda = \beta = 0.5 + \varepsilon$, $C = p = 1$, $\Theta_{min} = 0.5$, d.h. $\alpha > 1$.

Schritt	$\mathcal{B}_k$
0	$\{[-1,1]\}$
1	$\{[-1,0],[0,1]\}$
2	$\{[-1,-\frac{1}{2}],[-\frac{1}{2},0],[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1]\}$!
3	$\{\ \dots\ \}$