Mengenorientierte Numerik -12-

Notiztitel 07.02.2006

Berechnung eines (approximativ) optimalen Feedbacks (Regelung)

„closed-loop"-System:

$$x_{k+1} = f(x_k, u(x_k)), \quad k=0,1,\dots$$

wobei $u: S \to U$ Feedback.

Konstruktion: ggf: Approximation der optimalen Wertefunktion $V_{P(\ell)}: S \to [0,\infty)$

setze

$$u_{P(\ell)}(x) = \operatorname*{argmin}_{u \in U} \{ g(x,u) + V_{P(\ell)}(f(x,u)) \}$$

Satz 7.4: Angenommen, V ist stetig in 0. Es sei $P^{(\ell)}$ eine geschachtelte Folge von Partitionen und $D \subset S$ eine offene Menge mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $0 \in \operatorname{int} D$

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\ell_0(\varepsilon)$, so dass

$$V(x) - V_{P(\ell)}(x) < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und $\ell \geq \ell_0(\varepsilon)$.

Es sei $c > 0$ die größte Zahl, so dass

$$D_c(\ell) := V_{P(1)}^{-1}([0,c]) \subset D.$$

Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Funktion $\delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\alpha \to 0} \delta(\alpha) = 0$, so dass für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, alle $\ell \geq \ell_0(\varepsilon)$, alle $\eta \in (0,1)$ und alle $x_0 \in D_c(\ell)$ die Trajektorie

$$x_{k+1} = f(x_k, u_{p(\ell)}(x_k))$$

erfüllt,

$$V(x_k) \leq \max\left\{ V(x_0) - (1-\eta) \sum_{j=0}^{k-1} g(x_j, u_{p(\ell)}(x_j)), \; \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) + \varepsilon \right\}.$$

Beweis: zu $x \in D$ definieren wir $g_0(x) = \min_{u \in U} g(x,u)$. Wir wählen $\varepsilon_0 > 0$ so, dass

$$g_0(x) < \varepsilon_0 \Rightarrow V(x) \leq c - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Wähle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ beliebig und ein beliebiges $\ell \geq \ell_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

1. „$x_k \in D_c(\ell) \Rightarrow x_{k+1} \in D_c(\ell)$":

Sei $x \in D_c(\ell)$, dann gilt

$$\begin{aligned} V_{p(\ell)}(x) + \frac{\varepsilon}{2} &\geq V(x) \\ &= \inf_{u \in U} \{ g(x,u) + V(f(x,u)) \} \\ &\geq \min_{u \in U} \{ g(x,u) + V_{p(\ell)}(f(x,u)) \} \\ &= g(x, u_{p(\ell)}(x)) + V_{p(\ell)}(f(x, u_{p(\ell)}(x))) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} V_{p(\ell)}(x_{k+1}) &\leq V(x_k) - g(x_k, u_{p(\ell)}(x_k)) \\ &\leq V_{p(\ell)}(x_k) - g(x_k, u_{p(\ell)}(x_k)) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*) \end{aligned}$$

(a) Fall $g(x_k, u_{p(\ell)}(x_k)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$:

$$V_{p(\ell)}(x_{k+1}) \leq V_{p(\ell)}(x_k) \leq c$$

(b) Falls $g(x_k, u_{p(\ell)}(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$:

$$g_0(x_k) < \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow V(x_k) \leq c - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\Rightarrow V_{p(\ell)}(x_{k+1}) \leq V(x_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq c$$

$\Rightarrow x_{k+1} \in D_c(\ell)$.

Aus (*) folgt außerdem:

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}) &\leq V_{p(\ell)}(x_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq V_{p(\ell)}(x_k) - g(x_k, u_{p(\ell)}(x_k)) + \varepsilon \\ &\leq V(x_k) - g(x_k, u_{p(\ell)}(x_k)) + \varepsilon \qquad (**) \end{aligned}$$

2. Konstruktion von $\delta(\alpha)$:

Sei $C_\alpha = \{x \in D_c(\ell) \mid g_0(x) \leq \alpha\}$,

setze $\delta(\alpha) = \sup_{x \in C_\alpha} V(x)$.

($\delta(\alpha) \to 0$ für $\alpha \to 0$, da V stetig in 0 und $V(0)=0$).

Behauptung: $\underline{V(x_k) \leq \delta(\alpha) + \varepsilon \Rightarrow V(x_{k+1}) \leq \delta(\alpha) + \varepsilon}$ $\underline{\text{für } \alpha \geq \varepsilon.}$

(a) $V(x_k) \leq \delta(\alpha)$:

Mit (**) folgt

$$V(x_{k+1}) \leq V(x_k) - g(x_k, u_{p(\ell)}(x_k)) + \varepsilon$$

$$\leq \delta(\alpha)+\varepsilon$$

(b) $V(x_k) \in [\delta(\alpha), \delta(\alpha)+\varepsilon]$:

$$V(x_{k+1}) \leq V(x_k) - \underbrace{g(x_k, u_{p(\varepsilon)}(x_k))}_{\geq \alpha \geq \varepsilon} + \varepsilon \leq V(x_k) \leq \delta(\alpha)+\varepsilon$$

Sei $\eta \in (0,1)$ und $k \in \mathbb{N}$. Falls $V(x_k) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)+\varepsilon$ bleibt nichts zu zeigen. Falls $V(x_k) > \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)+\varepsilon$, dann gilt auch $V(x_j) > \delta\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)+\varepsilon$, $j=0,\dots,k-1$, d.h. also $x_j \notin C_{\varepsilon/\eta}$

d.h. $g(x_j, u_{p(\varepsilon)}(x_j)) \geq \frac{\varepsilon}{\eta}$, also $\eta g(x_j, u_{p(\varepsilon)}(x_j)) \geq \varepsilon$

Mit (**) folgt

$$V(x_{j+1}) \leq V(x_j) - g(x_j, u_{p(\varepsilon)}(x_j)) + \varepsilon$$

$$\leq V(x_j) - (1-\eta) g(x_j, u_{p(\varepsilon)}(x_j)).$$

Wenden wir diese Ungleichung wiederholt an, so erhalten wir

$$V(x_k) \leq V(x_0) - (1-\eta) \sum_{j=0}^{k-1} g(x_j, u_{p(\varepsilon)}(x_j)). \qquad \boxed{\Sigma}$$