7) Globale optimale Kontrolle

Kontrollsystem:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad k = 0,1,2,\dots$$

$x_k \in X \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, $u_k \subset U \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $f : X \times U \to X$ stetig.

Ziel: stabilisiere das System, d.h. wir nehmen an, dass $0 \in X$, $0 \in U$ – $(0,0)$ instabiler Ruhepunkt.
Finde Folge $\bar{u} = (u_k)_k$ von Kontrollwerten, so dass für die zugehörige Trajektorie $x_k(x,\bar{u})$ mit

$$x_{k+1}(x,\bar{u}) = f(x_k(x,\bar{u}), u_k), \quad k = 0,1,2,\dots$$

gilt: $x_k(x,\bar{u}) \to 0$ für $k \to \infty$.

zu $x \in X$ sei

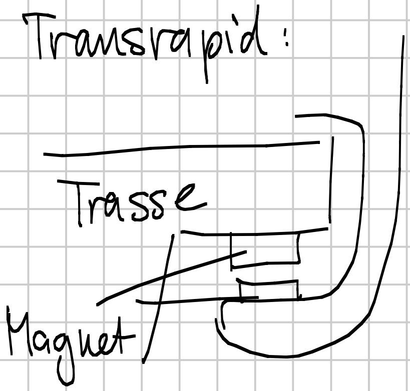
$$\mathcal{U}(x) = \{ \bar{u} \in U^{\mathbb{N}} : x_k(x,\bar{u}) \to 0 \text{ für } k \to \infty \}$$

und

$$\underset{\displaystyle X}{\overset{}{S}} \,\hat{}\; \quad S = \{ x \in X : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset \}. \quad (\text{„stabilisierbare Menge"})$$

$S \subset X$

Transrapid:



zusätzlich gegeben: Kostenfunktion

$$g : X \times U \to [0, \infty)$$

stetig,

Zusätzlich zu der Anforderung, das System zu stabilisieren, würden wir gerne die akkumulierten Kosten

$$J(x,\bar{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k, u_k) \in [0,\infty]$$

minimieren. Das Objekt, das wir berechnen wollen, ist also die (optimale) Wertefunktion

$$V(x) = \inf_{\bar{u}\in \mathcal{U}(x)} J(x,\bar{u}). \qquad (\inf \emptyset = \infty)$$

Alternative Formulierung:

geg: Graph (X,E), $E = \{(x, f(x,u)) \mid x\in X, u\in U\}$

gewichtet durch $w(e) = g(x,u)$, $e = (x, f(x,u))$.

ges: „Kürzester Pfad von x zu 0."

Diskretisierung des Problems:

Partition $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r\}$ von X, d.h. $\bigcup_{j=1}^{r} P_j = X$, $m(P_i \cap P_j) = 0$ für $i \neq j$, P_i abgeschlossen.

Wir definieren folgenden endlichen Graphen

$$G_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, E_{\mathcal{P}}), \quad E_{\mathcal{P}} = \{(P_i, P_j) \mid f(P_i, U) \cap P_j \neq \emptyset\}$$

mit Gewichtung

$$w(e) = \min_{\substack{x\in P_i\\ u\in U}} \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in P_j \}, \qquad e = (P_i, P_j)$$

Zu jedem $x\in X$ gibt es ein Element $P(x) \in \mathcal{P}$ mit $x \in P(x)$. Die Länge eines Pfades $p = (e_1, \dots, e_n)$,

$e_j \in E_P$, ist definiert als

$$w(p) = \sum_{j=1}^{n} w(e_j).$$

Wir definieren die approximative Wertefunktion V_P durch

$$V_P(x) = \min \{ w(p) \mid p = (e_1, \dots, e_n),\ e_1 = (P_0, P_1),\ x \in P_0,\ e_n = (P_{n-1}, P_n),\ 0 \in P_n \}.$$

Proposition 7.1: $V_P(x) \leq V(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Offensichtlich für $x \in X$ mit $V(x) = \infty$. Wir betrachten also $x \in X$ mit $V(x) < \infty$. Wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Pfad p in G_P gibt, der x mit 0 verbindet, so dass $w(p) \leq J(x, \overline{u})$ wobei $\overline{u} \in \mathcal{U}(x)$ eine Kontrollfolge mit $J(x, \overline{u}) < V(x) + \varepsilon$ ist.
Wir definieren p, indem wir der Trajektorie $(x_k(x, \overline{u}))_k$ folgen:

$$p = (e_1, \dots, e_n), \quad e_k = (P(x_{k-1}), P(x_k)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Die Länge dieses Pfades ist

$$\begin{aligned} w(p) = \sum_{k=1}^{n} w(e_k) &= \sum_{k=1}^{n} \min_{\substack{x \in P(x_{k-1}) \\ u \in U}} \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in P(x_k) \} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}, u_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} g(x_{k-1}, u_{k-1}) \\ &= J(x, \overline{u}). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Aussage. $\blacksquare$

Zur Konvergenz:
Wir betrachten eine Folge $(\mathcal{P}^{(\ell)})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von geschachtelten Partitionen mit $\lim_{\ell\to\infty} \operatorname{diam}(\mathcal{P}^{(\ell)}) = 0$.

<u>Proposition 7.2:</u> Für $x\in S$ ist die Folge $(V_{\mathcal{P}^{(\ell)}}(x))_\ell$ monoton wachsend.

<u>Beweis:</u> Es gilt ja $V_{\mathcal{P}^{(\ell)}}(x) = w(p^{(\ell)})$, wobei $p^{(\ell)}$ ein Pfad kürzester Länge ist, der x mit 0 verbindet.
Angenommen, es gäbe einen minimierenden Pfad $p^{(\ell)}$ in $G_{\mathcal{P}^{(\ell)}}$ und einen $p^{(\ell+1)}$ in $G_{\mathcal{P}^{(\ell+1)}}$ mit $w(p^{(\ell+1)}) < w(p^{(\ell)})$.
Dann können wir einen Pfad $\tilde{p}^{(\ell)}$ in $G_{\mathcal{P}^{(\ell)}}$ konstruieren, so dass $w(\tilde{p}^{(\ell)}) < w(p^{(\ell)})$ – dies aber ist ein Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $w(p^{(\ell)})$.
Zur Konstruktion von $\tilde{p}^{(\ell)}$:
Sei $p^{(\ell+1)} = (e_1^{(\ell+1)}, \dots, e_{n(\ell+1)}^{(\ell+1)})$ mit $e_j^{(\ell+1)} = (P_{j-1}^{(\ell+1)}, P_j^{(\ell+1)})$, d.h. $f(P_{j-1}^{(\ell)}, U) \cap P_j^{(\ell+1)} \neq \emptyset$. Da die Partitionen geschachtelt sind, existieren $\tilde{P}_{j-1}^{(\ell)}, \tilde{P}_j^{(\ell)} \in \mathcal{P}^{(\ell)}$ mit $\tilde{P}_{j-1}^{(\ell)} \supset P_{j-1}^{(\ell+1)}$, und $\tilde{P}_j^{(\ell)} \supset P_j^{(\ell+1)}$ und es gilt

$$f(\tilde{P}_{j-1}^{(\ell)}, U) \cap \tilde{P}_j^{(\ell)} \neq \emptyset$$

und daher $(\tilde{P}_{j-1}^{(\ell)}, \tilde{P}_j^{(\ell)}) \in E_{\mathcal{P}^{(\ell)}}$. Diese Konstruktion ist für alle j möglich und wir erhalten den Pfad

$$(\tilde{e}_1^{(\ell)}, \dots, \tilde{e}_{n(\ell+1)}^{(\ell)}), \quad \tilde{e}_j^{(\ell)} = (\tilde{P}_{j-1}^{(\ell)}, \tilde{P}_j^{(\ell)}),$$

mit

$$w(\tilde{e}_j^{(\ell)}) = \min_{\substack{x\in \tilde{P}_{j-1}^{(\ell)} \\ u\in U}} \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in \tilde{P}_j^{(\ell)} \}$$

$$\leq \min_{\substack{x\in P_{j-1}^{(\ell+1)} \\ u\in U}} \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in P_j^{(\ell+1)} \}$$

$$= w(c_j^{(\ell+1)})$$

und damit $w(\tilde{p}^{(\ell)}) \leq w(p^{(\ell+1)}) < w(p^{(\ell)})$. ↯ $\blacksquare$