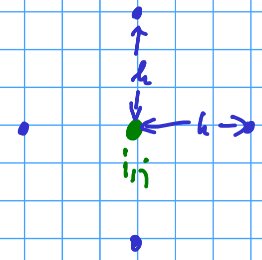
$$|\nabla u| = \frac{1}{F} > 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u\big|_{\Gamma_0} = 0$$

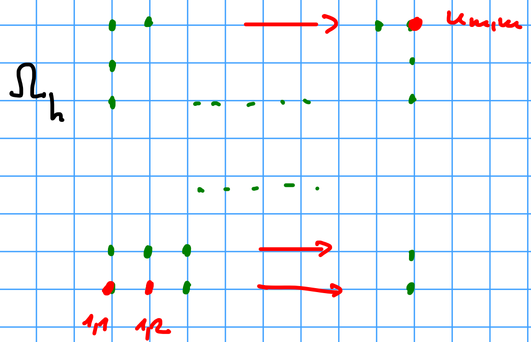


Diskretisierung

$$G(u)_{i,j} = \max\left(u_{i,j} - u_{i-1,j},\ u_{i,j} - u_{i+1,j},\ 0 \right)^2 + \max\left(u_{i,j} - u_{i,j-1},\ u_{i,j} - u_{i,j+1},\ 0 \right)^2 - \frac{h^2}{F_{i,j}^2} \overset{!}{=} 0$$

m×m Gitter

$N = m^2$



Gauß-Seidel-Verfahren:

In jedem äußeren Schritt durchlaufe alle Punkte (i,j) des Gitters (innere Schleife) und wähle in jedem dieser Schritte $u_{i,j}$ so, dass $G(u)_{i,j} = 0$

Konvergenz folgt aus Monotonieeigenschaften

Beobachtung: # äußere Schritte ist prop. zu m

Aufwand: $O(N \cdot m) = O(N^{3/2})$

für N-dimensionales willkürlich. Glg.system

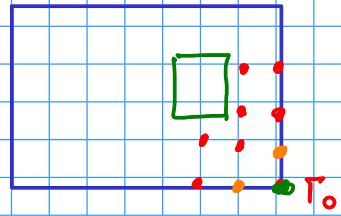
Beobachtung: Kausalität

Lösung $(u_{i,j})_{i,j}$ von $G(u) = 0$ hängt nur von den kleineren Nachbarwerten $u_{k,l} < u_{i,j}$ ab

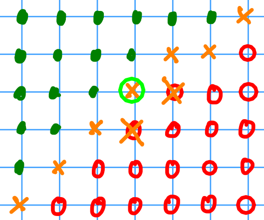
(k,l) Nachbar von (i,j)

(7.7) Fast-Marching: Der Basisalgorithmus

(Tsitsiklis '95, Sethian '95)



Idee



- • exakter Wert ist bereits berechnet (active)
- × Kandidatenpunkte (trial)
- o noch nicht zu behandeln (far-away)

$\}$ flags

Algorithmus

Solange es noch Trial-Punkte gibt
- A. Setze den Trial kleinsten Wertes aktiv
- B. Berechne die Werte seiner Nachbarn wie im Gauß-Seidel-Verfahren und setze sie auf trial

Behauptung liefert in N Schritten exakte Lösung

zugehörige Initialisierung:

$$u^0(x) = \begin{cases} 0 & x \in T_0 \cap \Omega_h \\ \text{Wert aus GS-Schritt} & x \text{ Nachbarpunkt von } T_0 \\ +\infty & \text{sonst} \quad \text{(IEEE-Arithmetik!)} \end{cases}$$

$$\text{flag}^0(x) = \begin{cases} \text{active} & x \in T_0 \cap \Omega_h \\ \text{trial} & \text{Nachbarpunkte von } T_0 \text{ in } \Omega_h \\ \text{far-away} & \text{sonst} \end{cases}$$

(7.8) Beweis, dass Fast-Marching Lsg. liefert

$u^0 \longrightarrow u^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u^N = u$ Lsg.

Induktiv

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \min(\text{Trialwerte}) \geq \max(\text{aktive Werte}) \\[1em] \text{(b)} & G(u^n)\big|_{\text{aktive Punkte}\setminus\Gamma_0} = 0 \end{array}}$$

Hilfslemma: In jedem Schritt können die Werte von u nicht steigen.

Beweis des Hilfslemmas: $G(u)_{ij} \longrightarrow \infty$ für $u_{ij} \longrightarrow \infty$ monoton

Setze $G(u_{ij}) = \infty$ für $u_{ij} = \infty$. $\qquad G(u)_{ij} = \infty \geq 0$

Wir zeigen induktiv, dass $G(u) \geq 0$ und die Werte von u nicht steigen.

In einem Gauß-Schritt für u_{ij} wird aus

$$\underbrace{G(u)_{ij} \geq 0}_{\text{Induktionsvor.}} \curvearrowright \underbrace{G(u)_{ij} = 0}_{\text{Gauß-Seidel-Schritt}}$$

also ist u_{ij} nicht gestiegen (Monotonie)

Ferner haben sich nur die $G(u)_{kl}$ verändert, mit k,l Nachbar von ij.

Da $u_{ij}\downarrow$ muss $G(u)_{kl}\uparrow$ und damit $G(u)_{kl} \geq 0$. $\boxtimes$

Beweis der Induktionsbehauptungen (a) & (b)

I. Nach Initialisierung gilt

(a)✓ $\min(\text{trialwerte}) \geq \max(\text{aktive Werte}) = 0$

(b)✓ da $\text{aktive Punkte} \setminus \Gamma_0 = \emptyset$

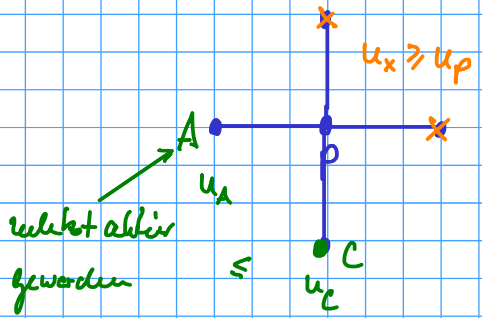
II. Schritt A des Algorithmus: Es werde Punkt P aktiv

$$u_p = \min(\text{Trialwerte}) \qquad \text{vor Schritt } A$$
$$\geq \max(\text{aktive Werte})$$

Somit gilt danach:

$$\min(\text{Trialwerte}) \geq u_p = \max(\text{aktive Werte})$$

Damit ist (a) erfüllt.



u_p wurde berechnet, als ein Nachbar aktiv wurde, etwa A (Ecke). Trialnachbar sind seitdem nur im Wert gefallen (Lemma), d.h. sie waren damals schon $\geq u_p$. Somit hängt u_p nur von seinen aktiven Nachbarn ab (Kausalität) und es gilt nach wie vor

$$G(u)_p = 0.$$

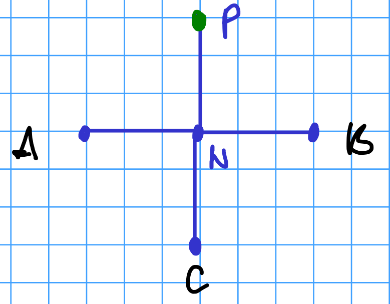
(*) Dies wird so bleiben, solange kein Nachbarpunkt (Trialpunkt) einen Wert $< u_p$ bekommt.

Hierfür wird (a) im Induktionsschluss mitgeführt.

Schritt B des Algorithmus (Berechnung neuer Trialwerte für die inaktiven Nachbarn von P)

Wegen (*) reicht es, zu zeigen dass $\boxed{u_{neu} \geq u_p}$

Widerspruchsbeweis: Sei etwa $u_N < u_P$ nach dieser Neuberechnung



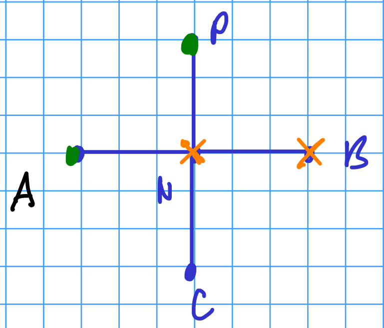
Fall 1: N hatte keinen aktiven Nachbarn vor P.

N war bislang far-away

$$u_N < u_P = \min(u_P, u_A, u_B, u_C)$$

$$G(u)_N = -\frac{h^2}{F_N^2} < 0$$ im Widerspruch zu Konstruktion von u_N.

Fall 2:



Sei A der Nachbar von N, der zuletzt (aber vor P) aktiv wurde.

Als A aktiv wurde, bekam N den Wert u_N^{alt}.

Zeit $\uparrow$

P aktiv $\longrightarrow u_N$

A aktiv $\longrightarrow u_N^{alt}$ $\longrightarrow$ Situation nachdem A aktiv wurde

Es gilt: i) $u_N < u_P \underset{\uparrow \text{ Lemma}}{\le} u_P^{alt}$

ii) $u_N < u_P \le u_N^{alt}$

$\uparrow$ nach Konstruktion von P als Min. der Trialwerte

Hätte es damals (als A aktiv wurde) keinen weiteren Trialwert, etwa u_B^{alt}, mit

$$u_B^{alt} < u_N$$

dann wäre u_N damals schon die Lsg. $u_N^{alt} = u_N$ gewesen, im Widerspruch zu (ii)

Es gab also einen Trialwert $u_B^{alt} < u_N$

$u_B \leq u_B^{alt} < u_N < u_p$.

immer

Damit Trialpunkt (der von Punkt verändert wird) mit Wert $< u_p$ im Widerspruch zu Konstruktion von P. $\boxtimes$

(7.9) <u>Aufwand</u> : max 3 skalare Lsg. (GS-Schritte) pro Knoten

$\curvearrowright$ Aufwand $\doteq O(\#\text{Knoten})$ <u>optimal</u> $O(N)$

<u>aber</u> : die Trialwerte müssen als <u>Priority Queue</u> organisiert werden (der kleinste muss ausgebbar sein)

im Mittel sind $O(h^{-1}) = O(\sqrt{N})$ Trialpunkte

Aufwand (Informatik) : $O(N \underline{\log \sqrt{N}}) = \underline{O(N \log N)} \ll O(N \cdot N^{1/2})$

entspricht FFT

für Gauß-Seidel