

# Motion involving mean curvature

Patricia Rachinger

8. November 2010

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bewegungsgleichungen</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Numerische Diskretisierung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Konvektions-Diffusions-Gleichung</b>	<b>7</b>

## 1 Bewegungsgleichungen

Im bisherigen Verlauf des Seminars wurden nur Bewegungen der Oberfläche betrachtet, die durch ein von außen erzeugtes Geschwindigkeitsfeld beeinflusst werden. Im Folgenden sollen nun Bewegungen behandelt werden, die durch ein inneres Geschwindigkeitsfeld erzeugt werden, das von der Level-Set Funktion  $\Phi$  abhängt.

Im Besonderen wird auf die Bewegung durch mittlere Krümmung eingegangen, das heißt, das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{V}$  ist proportional zur Krümmung  $\kappa$ , wobei  $\kappa = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right)$ .

Genauer ist das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{V}$  gegeben durch

$$\vec{V} = -b\kappa\vec{N}$$

wobei  $b$  eine Konstante ist,  $\kappa$  die Krümmung und  $\vec{N}$  den Normalenvektor bezeichnet.

Für die Konstante  $b$  müssen nun zwei Fälle unterschieden werden,  $b > 0$  und  $b < 0$ . Falls  $b$  größer als 0 ist, bewegt sich das Interface in Richtung Konkavität, das heißt rechts gekrümmte Bereiche bewegen sich so lange bis sie nach links gekrümmt sind. Dies führt dazu, dass Kreise verschwinden. Dieser Vorgang kann auch in Abbildung 1 beobachtet werden.

Ist  $b$  kleiner 0 gibt es eine Bewegung in Richtung Konvexität, nun bewegen sich links gekrümmte Bereiche nach rechts. Das bedeutet, dass Kreise wachsen und Rundungsfehler sich vervielfachen. Dies beobachtet man beispielsweise, wenn bei der Darstellung eines Kreises durch einen Rundungsfehler eine unrunde Stelle entsteht. Dann wird der Kreis im Laufe der Zeit immer mehr verfremdet. Deshalb ist diese Problemstellung instabil und nicht wohl definiert und wird im Folgenden nicht betrachtet.

Betrachtet man das Geschwindigkeitsfeld genauer, stellt man fest, dass es sich eigentlich nur um eine Geschwindigkeit in Richtung des Normalenvektors handelt:

$\vec{V}$  ist darstellbar als  $\vec{V} = V_n\vec{N} + V_t\vec{T}$  wobei  $\vec{T}$  ein Tangentialvektor und  $V_n$  bzw.  $V_t$  die Geschwindigkeitskomponenten in Normalen- bzw. in Tangentialrichtung sind (vergleiche Abb. 2).

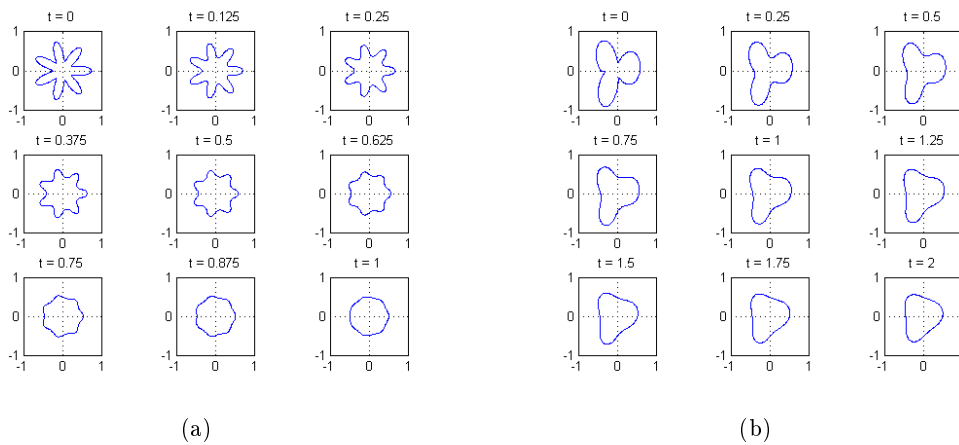


Abbildung 1: Bewegung zur Konkavität

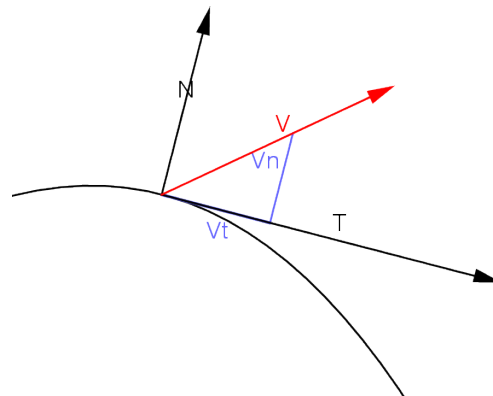


Abbildung 2: Veranschaulichung der Komponenten von V

Setzt man dies in die Level-Set Gleichung

$$\Phi_t + \vec{V} \nabla \Phi = 0 \tag{1}$$

ein, erhält man

$$\Phi_t + V_n \vec{N} \nabla \Phi = 0$$

da der Gradient von  $\Phi$  senkrecht auf den Niveaulinien von  $\Phi$  steht und somit für den Tangentialvektor  $\vec{T}$  gilt, dass

$$\vec{T} \cdot \nabla \Phi = 0$$

Benutzt man in der obige Gleichung  $\vec{N} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}$ , so erhält man die Level-Set Gleichung

für innere Geschwindigkeitsfelder:

$$\Phi_t + V_n |\nabla \Phi| = 0 \quad (2)$$

Dies bedeutet also, dass die Bewegung durch mittlere Krümmung durch  $V_n = -b\kappa$  charakterisiert wird. Setzt man dies in 2 ein, so ergibt sich:

$$\Phi_t = b\kappa |\nabla \Phi| \quad (3)$$

Hierbei handelt es sich um eine parabolische partielle Differentialgleichung, die nicht mit dem Upwind Schema aus dem letzten Vortrag behandelt werden kann, da sie Informationen aus allen Richtungen und nicht nur aus den Richtungen der Charakteristika enthält.

Falls  $\Phi$  eine Abstandsfunktion mit Vorzeichen (Signed-Distance Function) ist, ist die Gleichung 3 äquivalent zu:

$$\Phi_t = b\Delta \Phi \quad (4)$$

da bei einer solchen Abstandsfunktion gilt:  $\kappa = \Delta \Phi$  und insbesondere  $|\nabla \Phi| = 1$  auf dem Interface.

Gleichung 4 ist bekannt als die Wärmeleitungsgleichung, wobei  $\Phi$  die Temperatur darstellt und  $b$  die Wärmeleitfähigkeit.

Bei der numerischen Bearbeitung der Gleichungen 3 und 4 bleibt zu beachten, dass die Tatsache, dass  $\Phi$  eine Abstandsfunktion ist, durch numerische Lösungsmethoden verloren geht. Dies bedeutet, dass nach einem Iterationsschritt 3 und 4 nicht mehr äquivalent sind. Jedoch kann  $\Phi$  dann wieder als Abstandsfunktion initialisiert werden, damit 3 und 4 austauschbar bleiben. Diese Reinitialisierung wird durch eine Projektion auf die Mannigfaltigkeit der Abstandsfunktionen durchgeführt und in Kapitel 7 genauer behandelt.

## 2 Numerische Diskretisierung

Nun wird untersucht, wie man die Gleichungen 3 und 4 numerisch lösen kann. Dabei ist zu beachten, dass die aus der Numerikvorlesung bekannten Lösungsmethoden nicht direkt angewandt werden können, da die Gleichungen Differentialoperatoren enthalten. Aus diesem Grund müssen diese zuerst diskretisiert werden, bevor die bekannten Lösungsmethoden angewendet werden können.

- Diskretisierung der Ableitung

Da es sich um parabolische Gleichungen handelt, wird zur Diskretisierung das zentrale Differenzieren aus Kapitel 1 benutzt. Dies funktioniert wie folgt: auf dem

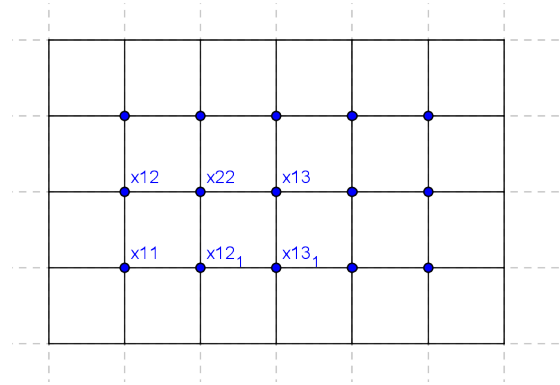


Abbildung 3:

Gitter in Abb 3 wird  $\Phi$  approximiert mit  $\Phi(x_{ij}) \approx \Phi_{ij}$ . Anschließend berechnet man die Ableitung. Dies kann zum Beispiel durch forward differencing geschehen, d. h.

$$\frac{\partial \Phi(x_{ij})}{\partial x} = \frac{\Phi_{(i+1)j} - \Phi_{ij}}{\Delta x}$$

Diese Methode ist allerdings nur erster Ordnung. Deshalb werden im Folgenden die Formeln zur Berechnung der Ableitung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x}$$

und

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

das sogenannte central differencing in die betreffenden Terme von 3 und 4

$$\Delta \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}$$

und

$$\kappa = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right)$$

eingesetzt, um eine Diskretisierung der Differentialoperatoren zu erhalten.

- Lösungsverfahren

Nun sollen einige der bekannten Lösungsverfahren auf ihre Anwendbarkeit untersucht werden.

- expliziter Euler

Wendet man dieses Lösungsverfahren auf Gleichung 4 an, so erhält man als Berechnungsvorschrift für  $\Phi^{n+1}$ :

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t (b\Delta\Phi^n)$$

Problematisch bei expliziten Eulerverfahren ist die Stabilität. Auch hier gelten wie im letzten Vortrag Einschränkungen an  $\Delta t$ . Diese sind gegeben durch:

$$\Delta t \left( \frac{2b}{(\Delta x)^2} + \frac{2b}{(\Delta y)^2} + \frac{2b}{(\Delta z)^2} \right) < 1$$

Daraus ergibt sich, dass  $\Delta t$  in  $O((\Delta x)^2)$  liegen muss, was eine erhebliche Einschränkung darstellt. Aufgrund der Ordnung des Eulerverfahrens liegt der Gesamtfehler dann auch in  $O((\Delta x)^2)$ .

– impliziter Euler

Um der Einschränkung für  $\Delta t$  zu entgehen, kann man das implizite Eulerverfahren betrachten. Wendet man dies auf Gleichung 4 an, so erhält man

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t (b\Delta\Phi^{n+1})$$

Da man nun aus Stabilitätsgründen keiner Einschränkung für  $\Delta t$  unterworfen ist, wählt man es normalerweise in  $O(\Delta x)$ . Daraus ergibt sich mit der Ordnung des impliziten Eulerverfahrens ein Gesamtfehler in  $O(\Delta x)$ .

– Trapezregel

Um den Gesamtfehler bei gleicher Wahl von  $\Delta t$  zu verbessern, kann man die Trapezregel verwenden, da diese Ordnung 2 hat. Wendet man dieses Lösungsverfahren auf Gleichung 4 an, so erhält man

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \left( b \frac{\Delta\Phi^n + \Delta\Phi^{n+1}}{2} \right)$$

Auch hier ist man wieder keine Einschränkung bezüglich der Wahl von  $\Delta t$  unterworfen. Die Wahl von  $\Delta t$  in  $O(\Delta x)$  führt jedoch zu einem Gesamtfehler von  $O((\Delta x)^2)$ .

Die Verwendung der Trapezregel zusammen mit dem zentralen Differenzieren nennt man Crank-Nicolson-Schema.

Man beobachtet, dass die Trapezregel das beste Ergebnis liefert. Selbstverständlich können die oben genannten Methoden auch auf Gleichung 3 angewen-

det werden. Allerdings ist bei den impliziten Methoden, also der Trapezregel und dem impliziten Euler zu beachten, dass in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss.

Dies ist bei Anwendung auf Gleichung 4 noch relativ einfach, da der Laplace-Operator linear diskretisiert werden kann. Angewendet auf die Gleichung 3 kann dies jedoch zu einem Problem werden, da sich  $\kappa^{n+1}|\nabla\Phi^{n+1}|$  nicht mehr linear diskretisieren lässt.

Zu beachten ist weiterhin, dass die Gleichungen 3 und 4 im Allgemeinen nicht austauschbar sind. Dies ist nur der Fall, falls  $\Phi$  eine Abstandsfunktion ist.

### 3 Konvektions-Diffusions-Gleichung

Als Anwendungsbeispiel für die oben betrachteten Lösungsmethoden kann man die Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$\Phi_t + \vec{V}\nabla\Phi = b\Delta\Phi \quad (5)$$

betrachten. Sie hat sowohl ein externes Geschwindigkeitsfeld, wie es im vorherigen Vortrag betrachtet wurde, als auch ein inneres, selbst erzeugtes.

Auch hier gibt es wieder eine die äquivalente Gleichung, falls  $\Phi$  eine Abstandsfunktion ist:

$$\Phi_t + \vec{V}\nabla\Phi = b\kappa|\nabla\Phi|$$

Zur numerische Lösung von 5 muss man die Methode aus dem vorhergehenden Vortrag mit oben genannten kombinieren. Man wendet das Upwind Schema auf den ersten Teil,  $\vec{V}\nabla\Phi$  und das zentrale Differenzieren auf  $b\Delta\Phi$  beziehungsweise  $b\kappa|\nabla\Phi|$  an.

Anschließend kann man jedes der oben betrachteten Lösungsverfahren verwenden. Benutzt man das explizite Eulerverfahren, so muss man wieder die Einschränkung an  $\Delta t$

$$\Delta t \left( \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2b}{(\Delta x)^2} + \frac{2b}{(\Delta y)^2} + \frac{2b}{(\Delta z)^2} \right) < 1$$

durch die CFL-Bedingung, beachten, wobei  $\vec{V} = (u, v, w)$ .

Betrachtet man statt 5

$$\Phi_t + \vec{V}\nabla\Phi = \epsilon\Delta\Phi \quad (6)$$

wobei  $\epsilon$  in  $O(\Delta x)$  ist, so kann man beobachten, dass die Gleichung für  $\Delta x$  gegen 0, also  $\epsilon$  gegen 0, gegen die Level-Set-Gleichung (Gleichung 1) konvergiert. Das bedeutet, dass der parabolische Teil der Differentialgleichung für enge Gitter verschwindet. Dies wird bei der Methode der künstlichen Viskosität ausgenutzt. Betrachtet man nur die

Konvektionsgleichung ohne den parabolischen Teil ( $\Delta\Phi$ ), so ist diese unter Umständen nicht eindeutig lösbar. Betrachtet man aber statt dessen Gleichung 6, so ist diese eindeutig lösbar und man kann den Grenzwert der Lösung für  $\epsilon \rightarrow 0$  als eindeutige Lösung der Konvektionsgleichung definieren.