

Motion in the normal direction

Hans Christian Reckelkamm

23. November 2010

Contents

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Die grundlegende Gleichung | 2 |
| 2 | Numerische Diskretisierung | 4 |
| 3 | Hinzufügen eines krümmungsabhängigen Terms | 6 |
| 4 | Hinzufügen eines äusseren Geschwindigkeitsfeldes | 7 |

1 Die grundlegende Gleichung

Nachdem wir in diesem Seminar Veränderungen unseres Interfaces durch äussere und innere Geschwindigkeitsfelder untersucht haben, wollen wir als nächstes die Veränderungen unter einem Geschwindigkeitsfeld betrachten, welches in Normalenrichtung zeigt. Ein derartiges Vektorfeld ist im Allgemeinen gegeben durch $\vec{V} = a\vec{N}$ bzw. $V_n = a$, wobei a konstant ist. Unsere daraus resultierende Level Set Gleichung hat die Form

$$\phi_t + a |\nabla\phi| = 0, \tag{1}$$

wobei $a \in \mathfrak{R}$ ist.

Im trivialen Fall $a = 0$ ist $\phi_t = 0$ und das Interface zeitlich konstant. Bei $a > 0$ bewegt sich das Interface in Normalenrichtung, und bei $a < 0$ natürlich in die entgegengesetzte Richtung. Der Einfachheit halber wollen wir hier, sofern nicht anders erwähnt, nur den Fall $a > 0$ mit 2 räumlichen Dimensionen betrachten. Der Fall mit $a < 0$ lässt sich daraus ohne Probleme ableiten und mehr Dimensionen zu keinem theoretischen Mehrwert, da wir uns meistens auf die x-Richtung konzentrieren.

Wenn wir (1) lösen wollen, haben wir im einfachsten Fall eine Signed Distance Funktion. In diesem Fall vereinfacht sich die Gleichung (1) zu $\phi_t = -a$. über das explizite Euler-Verfahren erhalten wir $\phi^{n+1} = \phi^n + a\Delta t$. Nehmen wir zur Verdeutlichung an, das $a > 0$ ist. Dann übernimmt in jedem Schritt die $\phi = 0$ Isokontur die Form der $\phi = -a\Delta t$ Isokontour, diese die Form der $\phi = -2a\Delta t$ Niveaumenge und so weiter und so fort. Anders herum ausgedrückt wandern die Isokonturen mit jedem Schritt um $a\Delta t$ in Normalenrichtung. Wenn wir nun den Gradienten nach jedem Schritt betrachten, zeigt sich, dass mit räumlicher Konstanz von $a\Delta t$ bzw. $\nabla(a\Delta t) = 0$:

$$\nabla\phi^{n+1} = \nabla\phi^n - \nabla(a\Delta t) = \nabla\phi^n$$

Damit haben wir wieder eine Signed Distance Funktion und können somit den gleichen Schritt beliebig oft wiederholen.

Punktweise bedeutet dies, dass wir bei einer Signed Distance Funktion nur $\phi_t = -a$ lösen müssen. Da a konstant war, können wir dies z.B. mit dem expliziten Euler-Verfahren bis auf Rundungsfehler genau lösen. Insbesondere haben wir keine Abbruchfehler, weil wir das a nicht annähern müssen. Hieran lässt sich der Nutzen von Signed Distance Funktionen erkennen. Falls wir keine solche Funktion vorliegen haben, müssen wir das Problem als Hamilton-Jacobi-Gleichung betrachten, wie in Kapitel 5 eingeführt wurde.

2 Numerische Diskretisierung

Wenn wir unser $\vec{V}_n = a\vec{N}$ in Gleichung 4.2 aus dem Buch für innere Geschwindigkeitsfelder

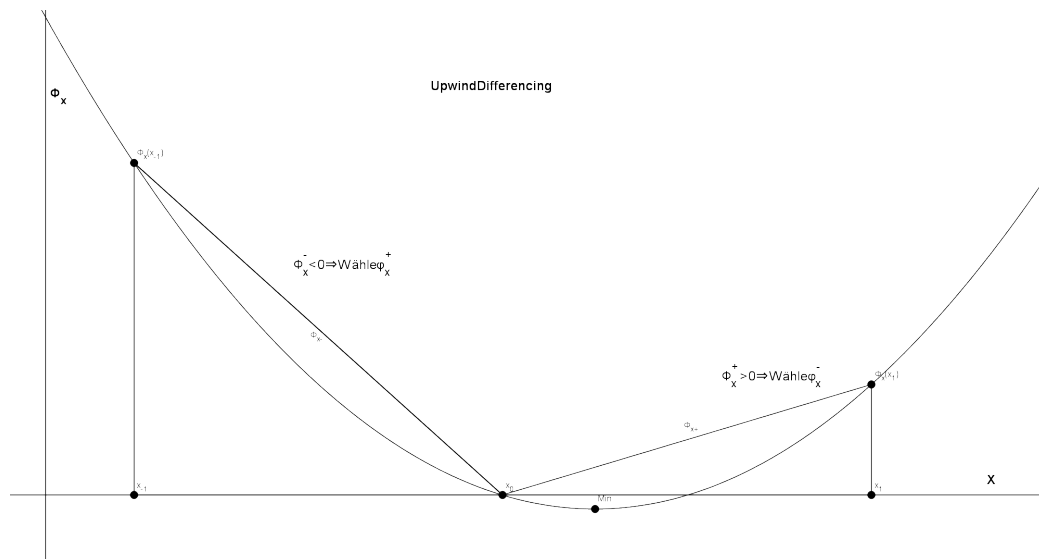
$$\phi_t + V_n \vec{N} \cdot \nabla \phi = 0$$

einsetzen, erhalten wir

$$\phi_t + \left(\frac{a\phi_x}{|\nabla\phi|}, \frac{b\phi_y}{|\nabla\phi|} \right) \cdot \nabla\phi = 0 \quad (2)$$

Im folgenden werden einige Verfahren zur Diskretisierung dieser Gleichung besprochen. Man muss beachten, dass die Richtungen einzeln betrachtet werden, was hier beispielhaft an der x-Richtung passiert.

Verwenden wir im einfachsten Fall Upwind Differencing, tauchen bei Sonic Points Probleme auf. Sonic Points sind lokale Extrema, wenn wir die Funktion eindimensional entlang der Differenzierungsrichtungen betrachten. An zu Sonic Points benachbarten Gitterpunkten besitzen ϕ_x^+ und ϕ_x^- in der Regel unterschiedliche Vorzeichen, was bei Upwind Differencing dazu führt, dass den Gitterpunkten *beide* Differenzenquotienten als Wert zugewiesen werden sollen. Das Verfahren an sich hat keine Mittel, diese Zweideutigkeit sinnvoll aufzulösen.



Dieses Problem wird von der Roe-Fix Methode umgangen. Diese wendet praktisch so lange wie möglich Upwind Differencing an. Sobald diese keine eindeutige Lösung liefert, d.h. wenn ein Sonic Point vorliegt, wechselt sie auf LLF und versucht, über Central Differencing und Addieren einer künstlichen Viskosität, das Verhalten in der Nähe des Sonic Point anzunähern (siehe Kapitel 5 für Einzelheiten). Der Nachteil liegt genau in dieser künstlichen Verschmierung von Sonic Points, die man in der Regel vermeiden will.

Ein Verfahren, das dies liefert, ist die Godunov Methode. Diese versucht, \hat{H} von allen möglichen Näherungen Extrema annehmen zu lassen:

$$\hat{H} = \text{ext}_x \text{ext}_y H(\phi_x, \phi_y)$$

Wenn man dies durchdiskutiert, sieht man, dass so weit wie möglich wieder die gleichen Werte wie durch Upwind Differencing verteilt werden. Nun wollen wir wieder den interessanten Fall mit unterschiedlichen Vorzeichen bei ϕ^+ und ϕ^- betrachten. Da wir $a > 0$ gefordert haben, können wir direkt das Vorzeichen von ϕ_x betrachten.

Fall 1, $\phi_x^- < 0, \phi_x^+ > 0$: Hier sieht unser Schnitt \vee -förmig aus und aus dem Minimum fließt Information zu beiden Seiten weg. Die Godunov-Methode minimiert in diesem Fall H und setzt $\phi_x=0$. Anstatt das Problem zu verstecken bzw. numerisch zu übermalen, wird die sinnvolle Wahl getroffen, dass das Minimum in dieser Richtung ruht.

Fall 2, $\phi_x^- > 0, \phi_x^+ < 0$: Hier sieht unser Schnitt \wedge -förmig aus. Von beiden Seiten fließt Information in das Maximum hinein. Das Godunov-Schema maximiert in diesem Fall H und weist dem Knoten $\max|\phi_x^-, \phi_x^+|$ zu. Dies kann man sich ähnlich zum inelastischen Stoß zweier gleich schwerer, aber unterschiedlich schneller Kugeln vorstellen, die gemeinsam in eine Richtung weiterfliegen.

3 Hinzufügen eines krümmungsabhängigen Terms

Nun kann man nach und nach das Problem komplexer machen. Will man beispielsweise Flammenfronten beschreiben, muss man durch verschieden starke Oberflächenkrümmungen verschieden starke Kühlungseffekte mit einberechnen. Dazu fügt man einen krümmungsabhängigen Term von der Art $V_n = a - b\kappa$, der aus Kapitel 4 bekannt sein sollte, zur Level Set Gleichung (Burch 4.4) hinzu. So erhält man

$$\phi_t + a |\nabla\phi| = b\kappa |\nabla\phi| \quad (3)$$

$a |\nabla\phi|$ lässt sich dabei unabhängig von der rechten Seite wie Abschnitt 2 diskretisieren, $b\kappa |\nabla\phi|$ wie in Kapitel 4. Die gemeinsame CFL-Bedingung an die Schrittweite lautet dann:

$$\Delta t \left(\frac{|H_1|}{\Delta x} + \frac{|H_2|}{\Delta y} + \frac{2b}{(\Delta x)^2} + \frac{2b}{(\Delta y)^2} \right) < 1, \quad (4)$$

vergleiche Kapitel 3 und 4.

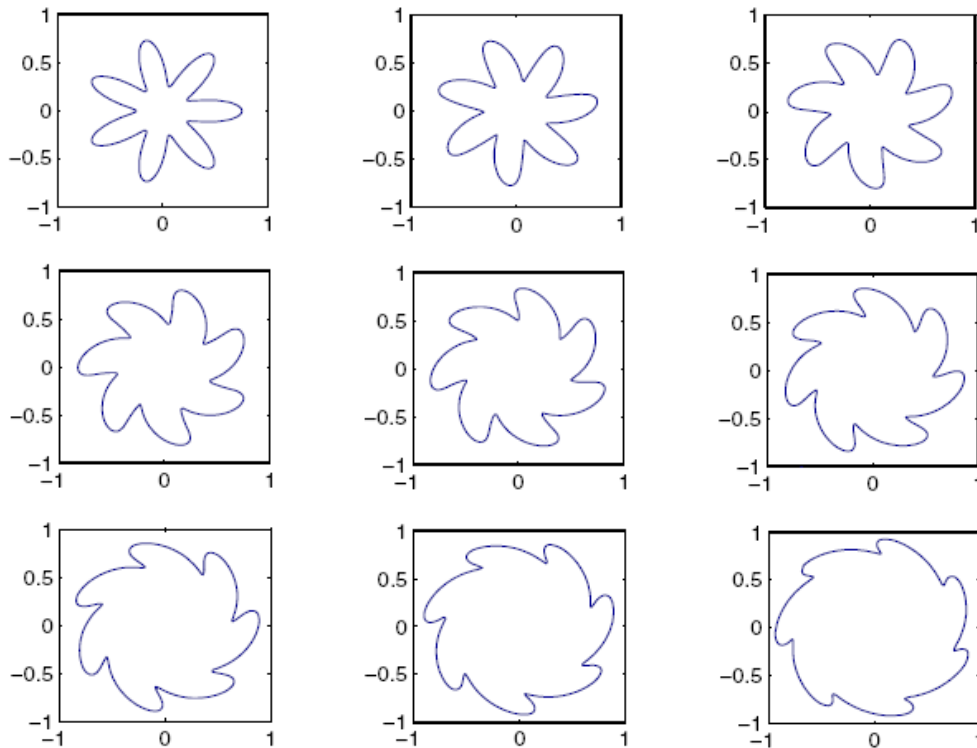
4 Hinzufügen eines äusseren Geschwindigkeitsfeldes

Die Differentialgleichung aus Abschnitt 3 bezieht immer noch nicht die Veränderungen und Bewegung des unverbrannten Materials mit ein. Dies führt zur etwas allgemeineren Gleichung

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi + a |\nabla \phi| = b \kappa |\nabla \phi|, \quad (5)$$

wobei \vec{V} die Geschwindigkeit des äusseren Materials ist. Praktisch kombiniert man in dieser Gleichung also ein äusseres Geschwindigkeitsfeld mit krümmungsabhängiger Bewegung. Es ist die allgemeinste Form der sogenannten G-Gleichung für brennende Flammenfronten.

Zur Verdeutlichung ein Bild aus dem Buch mit Ausbreitung in Normalenrichtung und einem rotierenden äusseren Geschwindigkeitsfeld:



Wie im vorherigen Abschnitt kann man die rechte Seite unabhängig diskretisieren, also konzentrieren wir uns hier auf $\vec{V} \cdot \nabla\phi + a|\nabla\phi|$, welches wir wie in Abschnitt 2 als Teil einer Hamilton-Jacobi-Gleichung behandeln.

Dazu betrachten wir zuerst die partiellen Ableitungen, für eine 2dimensionale DGL also

$$H_1 = u + \frac{a\phi_x}{|\nabla\phi|}$$

und

$$H_2 = u + \frac{a\phi_y}{|\nabla\phi|}$$

Der Vergleich mit bisherigen Gleichungen zeigt, dass der erste Summand für den Einfluss des äußeren Geschwindigkeitsfeldes steht und der zweite Summand für die eigene Bewegung parallel zur Normalenrichtung.

Nun folgen die aus Abschnitt 2 bekannten knotenweisen Falluntersuchungen, diesmal wieder nur in x-Richtung mit $a > 0$.

Wenn u , ϕ_x^- und ϕ_x^+ das gleiche Vorzeichen haben, stellen sich keine Probleme ein und der Wert für ϕ_x wird nach den bekannten Regeln gesetzt. Wenn sich die Vorzeichen unterscheiden, muss man den dominanten Teil bestimmen.

Im einfacheren Fall handelt es sich bei ϕ und eine Signed Distance Funktion. Damit vereinfacht sich H_1 zu

$$H_1 = u + a\phi_x$$

Danach funktionieren die Verfahren genau so wie in Abschnitt 2 zusammengefasst, nur dass diesmal das Vorzeichen von $H_1(\phi_x^+)$ bzw. $H_1(\phi_x^-)$ betrachtet wird und nicht von ϕ_x^+ bzw. ϕ_x^- .

Ist ϕ keine Signed Distance Funktion vor, kann man die obige Vereinfachung nicht durchführen und es fällt schwer, überhaupt die Nähe von Sonic Points zu festzustellen. Da das RF-Verfahren diese aber benötigt, bietet es sich in diesem Fall nicht an. Upward Differencing schlägt global ohnehin fehl. Daher ist es sinnvoll, direkt mit LLF zu arbeiten. Dazu muss man zwar bei

$$\alpha^x = \max |H_1(\phi_x, \phi_y)|, \quad \alpha^y = \max |H_2(\phi_x, \phi_y)|$$

die Maxima bestimmen. Da wir aber ohnehin künstlich Ungenauigkeit erzeugen, können wir die α 's nach oben abschätzen und für ein bisschen mehr

numerische Ungenauigkeit die Rechnung deutlich vereinfachen. Da die α 's nur als Koeffizienten auftauchen, halten sich die Auswirkungen in Grenzen.

Bei der Godunov Methode lassen sich die Auswirkungen solcher Näherungen nicht so einfach abschätzen. Eine Möglichkeit besteht darin, den Betrag von H_1 abzuschätzen durch

$$|H_1| < |u| + \frac{|a\phi_x|}{|\nabla\phi|}.$$

Wenn ϕ ungefähr eine Abstandsfunktion ist, kann man im Betrag auch die Unterschiede vernachlässigen und mit

$$|H_1| = |u + a\phi_x|$$

nähern. Diese Abschätzungen sind aber deutlich fehleranfälliger als die für das LLF-Verfahren.