Aufgabe 1 Das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}, \qquad y(0) = 0,$$

besitzt die einparametrige Lösungsschar

$$y_\alpha = \max(x-\alpha, 0)^2 \qquad (\alpha \geq 0).$$

Warum widerspricht dies *nicht* dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf?

Lösung

Wir verifizieren die Lösungsschar:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\alpha], \\ (x-\alpha)^2, & (\alpha, \infty). \end{cases}$$

Sie erfüllt den AW $y(0) = 0$ und die DGL:

$$y'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\alpha], \\ 2(x-\alpha), & (\alpha,\infty). \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{|0|}, & x \in [0,\alpha], \\ 2\sqrt{|(x-\alpha)^2|}, & (\alpha,\infty). \end{cases}$$

Aber die rechte Seite der DGL $F(x,y) = 2\sqrt{|y|}$ ist nicht im AW $y = 0$ differenzierbar, mit unbeschränkter Ableitung

$$\partial_y F(x,y) = \frac{\operatorname{signum} y}{\sqrt{|y|}} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{y \to \pm 0} \partial_y F(x,y) = \pm\infty,$$

also sind die Voraussetzung des Picard-Lindelöff-Satzes nicht erfüllt, der Satz nicht anwendbar und daher kein Widerspruch.

Das Beispiel hat folgendes Problem: Die Variante des Picard-Lindelöff-Satzes aus der VL verlangt die Differenzierbarkeit, somit gäbe es eine hier falsche Argumentation "Betrag nicht differenzierbar, also F nicht differenzierbar", es könnte ja immer noch Lipschitz (d.h. $|f(x) - f(y)| < L|x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und eine Konstante L), sein. Vielleicht sollten wir das in der Übung thematisieren, zumindest hinweisen, dass es hier auf die Unbeschränktheit ankommt.

Die angegebene Lösungsschar bekommt man wieder durch trennen der Variablen bei AW $y(0) = y_0 > 0$, aus Stetigkeitsgründen muss dann $y(x) > 0$ sein in Umgebung

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2\sqrt{y(x)} \\ \sqrt{y(x)} - \sqrt{y_0} = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds &= \int_0^x 1\,dt = x \\ y(x) &= (x - \sqrt{y_0})^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{y_0} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Füllen Sie die Fragezeichen in den folgenden asymptotischen Abschätzungen für $n \to \infty$:

a) $1 + \frac{2}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}) = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot (1 + \mathcal{O}(?))$

b) $e^{(1+\mathcal{O}(n^{-1}))^2} = e + \mathcal{O}(?)$

c) $\left(n + 2 + \mathcal{O}(n^{-1})\right)^n = ? \cdot (1 + \mathcal{O}(n^{-1}))$

Lösung

a)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}) &= 1 + \frac{2}{n} + \frac{C}{n^2} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{C}{(1+\frac{2}{n})\, n^2}\right) \\ &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{C}{n^2+2n}\right) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)(1 + \mathcal{O}(n^{-2})) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} e^{(1+\mathcal{O}(n^{-1}))^2} &= e^{(1+\frac{C}{n})^2} = e^{1+\frac{2C}{n}+\frac{C^2}{n^2}} = e^{1+O(n^{-1})} \\ &= e \cdot e^{\frac{D}{n}} = e \cdot \left(1 + \frac{D}{n} + \cdots\right) = e + \frac{eD}{n} = e + \mathcal{O}(n^{-1}) \end{aligned}$$

Hier ging die Standardabschätzung der e-Funktion, bzw. die abgebrochene exp-Reihe ein.

c)

$$\begin{aligned} \left(n + 2 + \mathcal{O}(n^{-1})\right)^n &= n^n \left(1 + \frac{2}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\right)^n = n^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n (1 + \mathcal{O}(n^{-2}))^n \\ &= (n+2)^n \left(1 + \frac{C}{n^2}\right)^n = (n+2)^n \left(1 + \frac{C}{n} + \cdots\right) \\ &= (n+2)^n \left(1 + \mathcal{O}(n^{-1})\right) \end{aligned}$$

Hier ging die Bernoulli-Ungleichung, bzw. die abgebrochene binomische Formel ein.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie: Die Gleichung

$$n = \frac{x_n}{\ln(x_n)}$$

hat für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ genau eine Lösung $x_n \in (1, e)$ mit $x_n \to 1$ für $n \to \infty$.

b) Zeigen Sie (auch falls in der Vorlesung schon gezeigt) für $n \to \infty$ und $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

1. $\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$
2. $a_n o(b_n) = o(a_n b_n), \quad a_n \mathcal{O}(b_n) = \mathcal{O}(a_n b_n)$
3. $\ln(1 + o(1)) = o(1)$
4. (vgl. Bornemann, (14.7)):

$$n \ln(1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})) = n \frac{\ln \ln n}{\ln n} + o(\frac{n}{\ln n}).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\ln(1+h) = h + \mathcal{O}(h^2)$ *für* $h \to 0$ *und* $(\frac{\ln \ln n}{\ln n})^2 = o(\frac{1}{\ln n})$

Bemerkung: Die Aussagen 1.) - 3.) gelten analog für $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a(x),\ b(x) > 0$ statt a_n, b_n.

c) (vgl. Bornemann S. 175/176) Durch "bootstrapping" kann man aus (einem verfeinerten) Primzahlensatz das asymptotische Verhalten der n-ten Primzahlen p_n für $n \to \infty$ erhalten:

$$p_n = \overline{x_n} - n + \mathcal{O}(\frac{n}{\ln n}), \quad n \to \infty, \qquad \overline{x_n} = n \ln n + n \ln \ln n + n \frac{\ln \ln n}{\ln n}.$$

Andererseits haben wir in der Vorlesung (mit Ihrer Hilfe: siehe b)) die Asymptotik der Lösungen $x_n > e$ der Gleichung $n = \frac{x_n}{\ln x_n}$ für $n \to \infty$ hergeleitet:

$$x_n = \overline{x_n} + o(\frac{n}{\ln n}), \quad n \to \infty.$$

Ferner haben wir in §9.2 gezeigt:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n), \quad n \to \infty.$$

Zeigen Sie nun für $n \to \infty$:

1. $p_n \simeq x_n$
2. $p_n \simeq \ln(n!)$
3. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0\colon \quad p_n > \ln(n!)$.

Lösung
siehe Zusatz.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die ersten beiden Terme der asymptotischen Entwicklung (für $n \to \infty$) von derjenigen Lösung x_n von

$$x_n^2 - \ln(x_n) = n \quad ,$$

für die $x_n \to \infty$ gilt.

Hinweis: Bootstrapping.

Lösung

Zur Lösbarkeit der Gleichung, machen wir Kurvendiskussion auf $f(x) = x^2 - \ln x, \quad x > 0$. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$ hat in $x > 0$ die einzige Nullstelle $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$, $f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 > 0$, also hat dort f ein Minimum. Weiterhin gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. Durch scharfes Hinsehen haben wir für $n = 1$ eine Lösung $x_1 = 1$, insbesondere folgt daraus, dass die Gleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwei Lösungen hat.

Wir bestimmen eine initiale Abschätzung für die Lösungsfolge die gegen ∞ geht.

$$(x_n - \sqrt{n})(x_n + \sqrt{n}) = x_n^2 - n = \ln x_n \Leftrightarrow x_n - \sqrt{n} = \frac{\ln x_n}{x_n + \sqrt{n}} < \frac{\ln x_n}{x_n} \to 0.$$

Sowie

$$x_n^2 = n + \ln x_n \geq n \Rightarrow x_n \geq \sqrt{n},$$

also

$$x_n + \sqrt{n} \leq 2x_n \Rightarrow \frac{\ln x_n}{x_n + \sqrt{n}} \geq \frac{\ln x_n}{2x_n} \to 0.$$

Es folgt mit der Einschließungsregel $x_n - \sqrt{n} \to 0$, also $x_n - \sqrt{n} = o(1)$.

Nun führen wir einen Bootstrapping-Schritt durch:

$$\begin{aligned}
x_n &= \sqrt{n + \ln x_n} \\
&= \sqrt{n + \ln(\sqrt{n} + o(1))} = \sqrt{n + \ln(\sqrt{n}) + o(n^{-1/2})} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{\ln(\sqrt{n})}{n} + o(n^{-3/2})} \\
&= \sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ln(\sqrt{n})}{n} + o(n^{-3/2}) + O\left(\frac{\ln^2 \sqrt{n}}{n^2}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{\ln(\sqrt{n})}{2\sqrt{n}} + o(1/n)
\end{aligned}$$

In der der zweiten Zeile benützen wir

$$\ln(\sqrt{n} + o(1)) = \ln\left(\sqrt{n}(1 + o(n^{-1/2}))\right) = \ln(\sqrt{n}) + \ln\left(1 + o(n^{-1/2})\right) = \ln(\sqrt{n}) + o(n^{-1/2}).$$

Im Schritt von der zweiten zur dritten Zeile benützen wir die Näherung

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2)$$

für $h \approx 0$ benützt. Sowie

$$\begin{aligned}
&O\left(\left(\frac{\ln \sqrt{n}}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^2\right) \\
&= O\left(\frac{\ln^2 \sqrt{n}}{n^2}\left(1 + o\left(\frac{n}{\ln \sqrt{n}\; n^{3/2}}\right)\right)^2\right) \\
&= O\left(\frac{\ln^2 \sqrt{n}}{n^2}(O(1)\right) = O\left(\frac{\ln^2 \sqrt{n}}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

und

$$nO\left(\frac{\ln^2 \sqrt{n}}{n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{\ln^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = o(1).$$