Dr. J. Giannoulis , M.Sc. S. Metzler, Dipl. Math. K. Tichmann

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie:

i)

$$\tan x \simeq \frac{8x}{\pi^2 - 4x^2} \qquad \textit{und} \qquad \sec x \simeq \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2}$$

für $x \to \pm\pi/2$

ii)

$$\frac{8x}{\pi^2 - 4x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2(\frac{2}{\pi})^{2k} x^{2k-1} \qquad \textit{und} \qquad \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(\frac{2}{\pi})^{2k+1} x^{2k}$$

für $|x| < \frac{\pi}{2}$, wobei $\frac{\pi}{2}$ der Konvergenzradius ist.

iii) Die einzigen Stellen aus $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{\pi}{2}\}$ an denen sec z und tan z nicht definiert sind (Singularitätsstellen) sind $z = \pm\frac{\pi}{2}$.

b) Ihnen wird gegeben

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sec x$$

für $|x| < \frac{\pi}{2}$, wobei $\frac{\pi}{2}$ der Konvergenzradius ist.
Ferner wissen Sie: "Falls zwei Potenzreihen an ihren (gemeinsamen) Singularitätspunkten ihres (gleichen) Konvergenzradius asymptotisch gleich sind, dann sind ihre Koeffizienten a_k bzw. b_k für $k \to \infty$ asymptotisch gleich."
Geben Sie nun mit Hilfe dieses Wissens und a) das asymptotische Verhalten von $\frac{A_{2k}}{(2k)!}$ für $k \to \infty$ an.

Lösung

Siehe Zusatz.

Aufgabe 2 Betrachten Sie das Geldwechselproblem aus der Vorlesung für den Fall, dass ein Betrag von $k \in \mathbb{N}_0$ Cents nur durch 1 Cent und 2 Cent Münzen kombiniert wird. Nach dem Vorgehen im Skript ist die erzeugende Funktion zur Folge der Kombinationsmöglichkeiten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =: f(x) = \frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)}$$

a) Bestimmen Sie für die letzte Darstellung die Partialbruchzerlegung in der Form

$$\frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}.$$

Hinweis: Lassen Sie Maple für sich rechnen (Befehl: `convert(...,parfrac)`*).*

b) Bestimmen Sie die Potenzreihe von $\frac{1}{(1-x)^2}$, indem Sie die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

1. differenzieren.
2. mit sich selbst multiplizieren (Cauchy-Produkt).

c) Nutzen Sie a), b) und nochmal die geometrische Reihe, um die Potenzreihe von f zu bestimmen und geben Sie durch Koeffizientenvergleich eine explizite Formel für die a_k an.

Lösung

a) Es wurde zwar hingewiesen, das mit Maple zu tun, aber damit die Leute einmal sehen wie das funktioniert:

Für A: Multipliziere die Darstellung der PBZ mit $(1-x)^2$ und setze $x=1$:

$$\left.\frac{1}{(1+x)}\right|_{x=1} = A + B\cdot(1-x) + \left.\frac{C\cdot(1-x)^2}{1+x}\right|_{x=1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = A$$

Für C: Multipliziere die Darstellung der PBZ mit $(1+x)$ und setze $x=-1$:

$$\left.\frac{1}{(1-x)^2}\right|_{x=-1} = \frac{A\cdot(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{B\cdot(1+x)}{1-x} + C\Big|_{x=-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{4} = C$$

Für B: Verwende die Ausgangsdarstellung der PBZ, setze $x=0$ und verwende die bisherigen Ergebnisse:

$$\left.\frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)}\right|_{x=0} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \left.\frac{C}{1+x}\right|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad 1 = A+B+C$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{1}{4}$$

Also folgt:

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x}$$

b) Differenzieren liefert:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

Cauchy-Produkt liefert:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} x^n x^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} 1\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

c) Wir bauen nun zusammen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)x^{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor + 1\right)x^k \\
\text{somit} \quad a_k &= \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor + 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Das separable Anfangswertproblem (f und g stetig)

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

kann ja für $g(y_0) \neq 0$ mit Trennung der Variablen gelöst werden. Wie lautet eine Lösung im Fall $g(y_0) = 0$? Unter welchen zusätzlichen Bedingungen an f und g ist diese Lösung dann eindeutig ?

Lösung

Wenn $g(y_0) = 0$ ist funktioniert das Argument "Division durch g und Stetigkeit in Umgebung von y_0" nicht, aber die Konstante Funktion $y(x) = y_0$ erfüllt natürlich die DGL und den AW.

$$\begin{aligned}
y'(x) = 0 &= f(x)\cdot 0 = f(x)\cdot g(y_0) \\
y(0) &= y_0
\end{aligned}$$

Damit diese eindeutig sein kann muß die rechte Seite der DGL die Voraussetzungen des Picard-Lindelöff-Satzes erfüllen. Mit der Variante aus der Vorlesung, heißt das, dass g in y_0 differenzierbar sein muss, andernfalls ist z.B. Aufgabe 4 ein Gegenbeispiel.

Vielleicht zum Einstieg in die DGLs bitte die Aussage des Picard-Lindelöff-Satzes wiederholen und wie die maximale Lebensdauer zu verstehen ist.

Aufgabe 4 P. Verhulst (1804–1849) hat die zeitliche Veränderung $y(x)$ der Größe y einer Population unter Berücksichtigung beschränkter Resourcen durch das Modell („logistische Gleichung“)

$$y'(x) = (\alpha - \beta y(x))\cdot y(x), \qquad y(0) = y_0 > 0,$$

mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ beschrieben.

a) Berechnen Sie die Lösung $y(x)$ und begründen Sie, warum diese eindeutig ist.

b) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} y(x)$. Was bedeutet die Existenz eines solchen Grenzwerts?

c) Diskutieren Sie Monotonie und Extremstellen von $y(x)$ für $x \geq 0$.

Lösung

a) Mit Picard-Lindelöff haben wir hier Existenz und Eindeutigkeit.

Fall 1: Konstante Lösung. Ist $y_0 = \frac{\alpha}{\beta} > 0$, so ist y_0 Nullstelle der rechten Seite und somit $y(x) = y_0$ eindeutige Lösung.

Fall 2: Ist $y_0 \neq \frac{\alpha}{\beta}$, so trennen wir die Variablen:

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{(\alpha - \beta s) \cdot s} \, ds &= \int_0^x 1 \, dt \\
\text{Mit PBZ} \quad \frac{1}{\alpha} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\beta}{\alpha - \beta s} + \frac{1}{s} \, ds &= x \\
\left[\ln \left(\frac{s}{\alpha - \beta s} \right) \right]_{y_0}^{y(x)} &= \alpha x \\
\ln \left(\frac{y(x)}{\alpha - \beta y(x)} \cdot \frac{\alpha - \beta y_0}{y_0} \right) &= \alpha x \\
\text{usw.} \quad y(x) &= \frac{\alpha y_0 e^{\alpha x}}{\alpha - \beta y_0 (1 - e^{\alpha x})}
\end{aligned}$$

Die Lösung ist für alle $x \geq 0$ definiert und positiv.

b) Der Grenzwert im Fall 2 ist

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha y_0 e^{\alpha x}}{\alpha - \beta y_0 (1 - e^{\alpha x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha y_0}{\alpha e^{-\alpha x} - \beta y_0 e^{-\alpha x} + \beta y_0} = \frac{\alpha}{\beta},$$

und gilt auch im Fall 1.

Mathematisch ist das ein Beispiel für den Kollaps am Rand, biologisch heißt das, dass bei beschränkten Resourcen die Population beschränkt bleibt und mit der Zeit gegen eine Grenzpopulation geht.

c) Für Monotonie und Extremwerte schauen wir uns die Ableitung bzw. die DGL an.

$$y'(x) = 0 \quad \text{wegen DGL} \quad (\alpha - \beta y(x)) \cdot y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 0 \quad \text{oder} \quad y(x) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Die erste Möglichkeit scheidet aus, wie oben festgestellt ist die Lösung positiv.

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha y_0 e^{\alpha x}}{\alpha - \beta y_0 (1 - e^{\alpha x})} &= \frac{\alpha}{\beta} \\
\beta \alpha y_0 e^{\alpha x} &= \alpha^2 - \alpha \beta y_0 + \beta \alpha y_0 e^{\alpha x} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

Also nur unsere Konstante aus Fall 1 erfüllt das, die Lösung aus Fall 2 ist daher entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend auf $x \geq 0$. Es reicht daher nur einen Wert zu prüfen.

$$\begin{aligned}
y_0 > \frac{\alpha}{\beta} \quad &\Rightarrow \quad y'(0) = (\alpha - \beta y_0) \cdot y_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad y' < 0 \\
y_0 < \frac{\alpha}{\beta} \quad &\Rightarrow \quad y'(0) = (\alpha - \beta y_0) \cdot y_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad y' > 0 \\
y_0 = \frac{\alpha}{\beta} \quad &\Rightarrow \quad y' = 0
\end{aligned}$$